http://alqua.org/documents/CAL2

Joaquin Retamosa Granado	iokin@nuc3.fis.ucm.es	http://nuc3.fis.ucm.es
Pablo M. García Corzo	ozrocpablo@gmail.com	http://alqua.org

Cálculo multivariable

versión 0.1
20/10/2007





CDU 531.5

Area Cálculo

Editores

Pablo M. García Corzo ozrocpablo@gmail.com

Notas de producción

`alfeizar, v. 0.3` © del diseño Álvaro Tejero Cantero.

compuesto con software libre

Dedicado

A nuestros amigos y familia

Índice general

Tema 1

Nociones sobre la geometría y topología de $\mathbb{R}^q$

1.1 Introducción

Uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas es el número. Introducido en la antigüedad, el concepto se ha ido generalizando y profundizando con el tiempo. El número es esencial en el desarrollo de diversas disciplinas como la Física, la Química, la Economía o la Informática. Las magnitudes físicas[1] están definidas por un valor numérico, un error (también numérico) asociado a las limitaciones del proceso de medida y una unidad adecuada a su dimensión. Las matemáticas estudian las magnitudes haciendo abstracción de su naturaleza y de como han sido medidas, es decir, no tienen en consideración unidades o posibles errores. De forma genérica consideraremos que los valores numéricos carecen de dimensiones y en los pocos casos en que les asociemos una dimensión no utilizaremos un sistema de unidades concreto.

El cero, los números naturales $\mathbb{N}$ y sus opuestos constituyen el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. Todas las razones de dos números enteros p/q (con $q \neq 0$) dan lugar a los números racionales que se denotan por $\mathbb{Q}$. Los números enteros son un subconjunto de los racionales, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, ya que cualquier entero p se puede escribir como la razón $p/1$ de dos números enteros. Los números fraccionarios se pueden representar por fracciones finitas o por fracciones periódicas infinitas; por ejemplo

$$\frac{5}{2} = 2.5, \quad \frac{10}{3} = 3.333\ldots$$

Existen además números en forma de fracciones indefinidas aperiódicas que se denominan irracionales. Ejemplos de estos números son

$$\sqrt{2}, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

La unión de ámbos tipos de números, racionales e irracionales, da lugar al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Los números reales están ordenados: para cualquier par x e y se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones $x < y$, $x = y$, $x > y$.

Otro hecho importante es que $\mathbb{R}$ puede representarse geométricamente como una recta. Se llama recta real o eje númerico a una recta infinita en la que se han establecido: i) un origen que se denota habitualmente como O, ii) un sentido positivo (señalizado mediante una flecha) y iii) una escala para medir longitudes. Normalmente la recta real se representa en posición horizontal y se considera positivo el sentido izquierda-derecha. Cuando x es positivo se representa mediante un punto P situado a la derecha de O y a una distancia $d(O,P) = x$. Si es negativo se le representa por un punto Q situado a la izquierda de O y a una distancia $d(O,P) = -x$. El cero corresponde al propio origen O.

Por este método cada número real x está representado por un punto P de la recta real. Diremos que el valor numérico x (incluyendo el signo) es la «distancia orientada» del punto P al origen.

[1] Elegimos este ejemplo ya que el curso está orientado a los alumnos de la **Licenciatura en Física**.

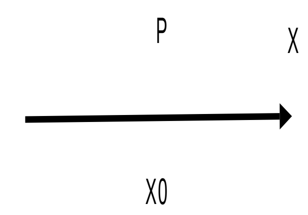


Figura 1.1: La recta real

La relación es biunívoca: dos puntos distintos caracterizan números reales distintos. Y por ello los términos número real y punto del eje real son sinónimos y así los utilizaremos.

En lo que sigue utilzaremos las siguientes propiedades de los números reales, que aceptaremos sin demostración:

1. *Dados dos números reales arbitrarios $x < y$, existen números reales z, tanto racionales como irracionales, que verifican que $x < z < y$.*

2. *Todo número irracional se puede expresar con grado de precisión arbitrario mediante números racionales.*

1.2 El espacio euclídeo $\mathbb{R}^q$

1.2.1 Producto escalar y distancia euclídea

De forma análoga existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de un plano y pares ordenados de números reales, que reciben el nombre de coordenadas del punto. Consideremos dos rectas perpendiculares situadas sobre el plano a las que llamaremos ejes coordenados X e Y; elegiremos su intersección O como origen de coordenadas, definiremos sobre ámbos ejes una escala adecuada y asociaremos el origen de coordenadas con el par $(0,0)$. Dado un punto P trazamos dos segmentos que pasan por él y son perpendiculares a los ejes. Sus intersecciones con los ejes definen dos puntos a los que corresponden valores numéricos x_0 e y_0, tal como se muestra en la figura 1.2. Los dos números del par ordenado (x_0, y_0) se denominan coordenadas cartesianas del punto P.

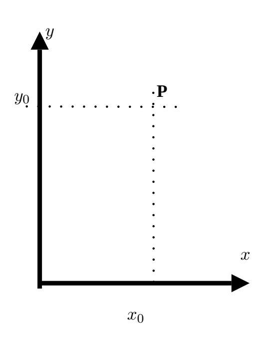


Figura 1.2: Coordenadas cartesianas en el plano

Los puntos en el espacio se caracterizan de forma similar mediante ternas de números reales ordenados. Elijamos tres rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en un punto del espacio.

Las tres rectas reciben el nombre de ejes coordenados X, Y y Z y su intersección O el nombre de origen de coordenadas. Definimos una escala adecuada sobre los tres ejes coordenados y asociamos la terna $(0,0,0)$ al origen de coordenadas. Dado un punto P procedemos como antes: trazamos segmentos que pasan por dicho punto y son perpendiculares a los ejes coordenados; sus intersecciones con dichos ejes definen tres puntos caracterizados por los números x_0, y_0 y z_0, que reciben el nombre de coordenadas cartesianas del punto P.

La elección de los ejes X, Y y Z es arbitraria a excepción de las dos reglas siguientes:

1. Los tres ejes son perpendiculares entre sí.

2. Su sentido positivo queda establecido por los dedos pulgar, índice y corazón de la mano derecha situada sobre la terna de ejes.

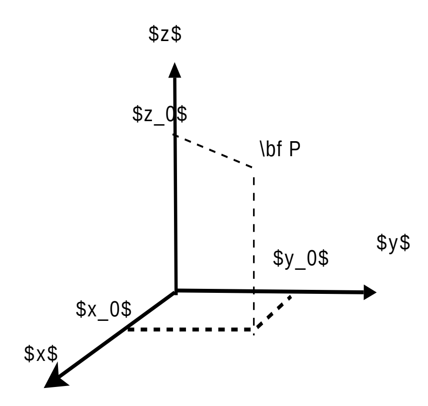


Figura 1.3: Coordenadas cartesianas en el espacio

Cuando se introduce el concepto de distancia euclídea entre dos puntos, la recta, el plano y el

espacio son ejemplos particulares de lo que se llaman espacios euclídeos

Definición 1.1 (Espacio Euclídeo)

El espacio euclídeo ($q-dimensional$) $\mathbb{R}^q$, con $q \in \mathbb{N}$, es el conjunto formado por todas la sucesiones $\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_q)$ de q números reales.

Un elemento de $\mathbb{R}^q$ se denomina frecuentemente un punto en $\mathbb{R}^q$; $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se denominan la recta, el plano y el espacio respectivamente. Los números $x_1, x_2, \cdots, x_q$ son las coordenadas cartesianas de $\vec{\boldsymbol{x}}$.

Los elementos de $\mathbb{R}^q$ se denominan también vectores en $\mathbb{R}^q$, ya que este espacio es un espacio vectorial con las operaciones usuales:

$$\vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_q + y_q),$$

$$\lambda \vec{\boldsymbol{x}} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_q),$$

y por tanto también será correcto denominar a los números $x_1, x_2, \cdots, x_q$ componentes del vector $\vec{\boldsymbol{x}}$.

En este espacio se introducen los conceptos de producto escalar de dos vectores

$$\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle \triangleq \sum_{i=1}^{q} x_i y_i,$$

y se definen la norma euclídea de un vector $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q$

$$\|\vec{\boldsymbol{x}}\| \triangleq \sqrt{\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}} \rangle} = \sqrt{\sum_i x_i^2},$$

y la distancia entre dos elementos de $\mathbb{R}^q$

$$d(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) \triangleq \|\vec{\boldsymbol{y}} - \vec{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

En el caso particular de $\mathbb{R}$ la norma coincide con el valor absoluto, es decir, $\|x\| = |x|$ y por tanto $d(x, y) = |x - y|$.

Dado que la norma y la distancia se definen de forma subsidiaria al producto escalar de dos

elementos de $\mathbb{R}^q$, todas sus propiedades serán consecuencia directa de las propiedades de éste.

Teorema 1.1 (Propiedades del producto escalar)

Si $\vec{x}$, $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ e $\vec{y}$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$ son elementos del espacio $\mathbb{R}^q$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

1. *Simetría:* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,
2. *Bilinealidad:* $\begin{cases} \langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda\vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \\ \langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle, \\ \langle \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}_2, \vec{y} \rangle. \end{cases}$
3. *Positividad:* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ *y* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ *sys* $\vec{x} = \vec{0}$.

Demostración 1.1

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{q} x_i y_i = \sum_{i=1}^{q} y_i x_i = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$,
2. En virtud de la propiedad precedente bastará con demostrar que

$$\begin{array}{l} \langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \\ \langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle, \end{array}$$

para completar la demostración del punto 2. En efecto,

$$\langle \lambda\vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{q} \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^{q} x_i y_i = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2 \rangle = \sum_{i=1}^{q} x_i (y_{1_i} + y_{2_i}) = \sum_{i=1}^{q} x_i y_{1_i} + \sum_{i=1}^{q} x_i y_{2_i} = \langle \vec{x}, \vec{y}_1 \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y}_2 \rangle$$

3. $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \sum_{i=1}^{q} x_i^2$, y la suma de un número finito de sumandos positivos o cero es siempre positiva o nula; para que la suma sea cero todos y cada uno de los sumandos deben ser nulos.

Las propiedades de la norma de un vector se deducen de forma trivial a partir de las ecuaciones enunciadas en el teorema 1.1

Teorema 1.2 (Propiedades de la norma)

Si $\vec{x}$, $\vec{y}$ son elementos del espacio $\mathbb{R}^q$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ *y* $\|\vec{x}\| = 0$ *sys* $\vec{x} = \vec{0}$,
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \, \|\vec{x}\|$,
3. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$.
4. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$,

Demostración 1.2

Dejando como ejercicio la demostración de las dos primeras propiedades, nos centraremos en las dos últimas.

3. Si $\vec{\boldsymbol{x}}$ ó $\vec{\boldsymbol{y}}$ son nulos la igualdad se satisface de forma trivial. Supongamos que $\vec{\boldsymbol{x}}$ e $\vec{\boldsymbol{y}}$ son no nulos y linealmente dependientes ($\vec{\boldsymbol{y}} = \lambda \vec{\boldsymbol{x}}$); entonces

$$\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \sum_{i=1}^{q} x_i(\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{q} x_i^2 = \lambda \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\|^2 = \lambda/|\lambda| \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|.$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|, & \text{si} \quad \lambda > 0, \\ \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = - \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\| < \|x\| \, \|y\|, & \text{si} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Si, por el contrario, $\vec{\boldsymbol{x}}$ e $\vec{\boldsymbol{y}}$ son linealmente independientes, es decir, $\vec{\boldsymbol{y}} - \lambda \vec{\boldsymbol{x}} \neq \vec{\boldsymbol{0}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$0 < \left\| \lambda \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 = \langle \lambda \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}, \lambda \vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \lambda^2 \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\|^2 + \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 - 2\lambda \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle,$$

El miembro de la derecha define una parábola en la variable λ; para que dicha parábola no corte al eje $\lambda = 0$ debe cumplirse que

$$4 \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle^2 - 4 \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\|^2 \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 < 0,$$

de donde se deduce fácilmente que $- \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\| < \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle < \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|$. Así, cualquiera que sea el caso la propiedad 3 es correcta.

4. $$\begin{aligned} \left\| \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 &= \langle \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}} + \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\|^2 + \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 + 2 \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle \\ &\leq \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\|^2 + \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\|^2 + 2 \left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\| = \left(\left\| \vec{\boldsymbol{x}} \right\| + \left\| \vec{\boldsymbol{y}} \right\| \right)^2. \end{aligned}$$

Calculando la raiz cuadrada positiva de esta relación obtenemos inmediatamente la propiedad enunciada en cuarto lugar.



Enunciamos a continuación las propiedades fundamentales de la distancia euclídea, cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector

Teorema 1.3 (Propiedades de la distancia euclídea)

Bajo las mismas condiciones que en el teorema 1.2 se verifica

1. $d\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) \geq 0$ *y* $d\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) = 0$ *sys* $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}$,
2. $d\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) = d\left(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}}\right)$,
3. $d\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{z}}\right) \leq d\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) + d\left(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{z}}\right)$.

Ejemplo 1.1

Demostremos que la función $d_1\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, definida en $\mathbb{R}^2$, satisface todas las propiedades de la distancia euclídea y que por tanto es una definición alternativa de distancia en $\mathbb{R}^2$ (la generalización a un número arbitrario de dimensiones es inmediata).

1. La positividad de d_1 es evidente: $d_1\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$. Además

$$\begin{aligned} d_1\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}\right) = 0 &\Leftrightarrow |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} |x_1 - y_1| = 0 & \leftrightarrow & x_1 - y_1 = 0 & \leftrightarrow & x_1 = y_1 \\ |x_2 - y_2| = 0 & \leftrightarrow & x_2 - y_2 = 0 & \leftrightarrow & x_2 = y_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{y}}. \end{aligned}$$

2. $d_1(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = d_1(\vec{\boldsymbol{y}}, \vec{\boldsymbol{x}})$.

3. $d_1(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$, y utilizando que $|A + B| \leq |A| + |B|$, resulta

$$d_1(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) \leq |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2| = d_1(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{z}}) + d_1(\vec{\boldsymbol{z}}, \vec{\boldsymbol{y}}).$$

Una vez que el lector ha aceptado a d_1 en el «club de las distancias respetables» podemos estudiar el aspecto de la circunferencia asociada a la nueva distancia. La definición general de circunferencia de radio R (centrada en el origen de coordenadas) es

$$C \triangleq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ d(x, y\ , 0, 0) = R\right\},$$

y particularizando para la distancia d_1

$$C \triangleq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ |x| + |y| = R\right\}.$$

Por cuadrantes la expresión precedente se escribe como

1. $\boxed{x > 0, y > 0.}$ $x + y = R \longrightarrow y = R - x$.

2. $\boxed{x < 0, y > 0.}$ $-x + y = R \longrightarrow y = R + x$.

3. $\boxed{x < 0, y < 0.}$ $-x - y = R \longrightarrow y = -R - x$.

4. $\boxed{x > 0, y < 0.}$ $x - y = R \longrightarrow y = -R + x$.

Así, en cada cuadrante la circunferencia coincide con un segmento de recta. Uniendo los cuatro segmentos concluimos que la circunferencia es un polígono de cuatro lados perpendiculares entre sí y que forman ángulos de 45 grados con los ejes.

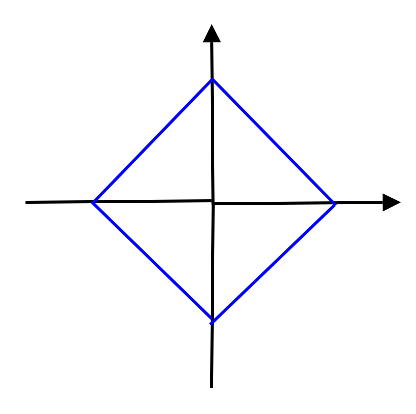


Figura 1.4: Esto también es una circunferncia

1.2.2 Bases ortogonales en $\mathbb{R}^q$

El siguiente teorema muestra que el ángulo interno que forman dos vectores del plano o del espacio está estrechamente ligado a su producto escalar

Teorema 1.4 (Ángulo entre dos vectores del espacio)

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del plano o del espacio y $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo interno que forman dichos vectores, entonces se cumple que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Demostración 1.4

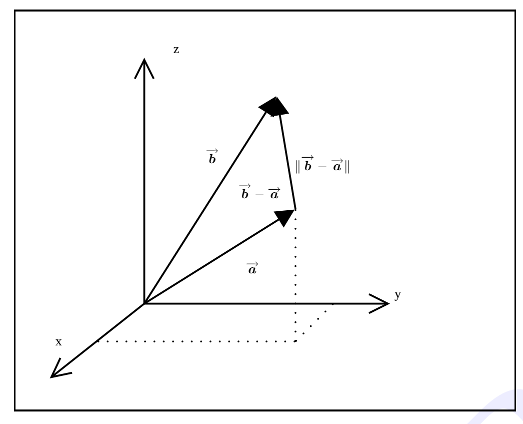


Figura 1.5: Ley de los cosenos

Acudimos a la trigonometría para demostrar este teorema. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo que tiene un vértice en el origen de coordenadas y dos de sus lados adyacentes definidos por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tal como se muestra en la figura, obtenemos

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

y por la definición de norma

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} - u \rangle, \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle, \|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u},$$

resulta

$$\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Ahora bien

$$\langle \vec{v} - \vec{u}, \vec{v} - \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle,$$

con lo cual

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta,$$

o lo que es lo mismo

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos podemos despejar

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}.$$

Para generalizar este resultado utilizamos que cualquiera que sea la dimensión del espacio euclideo se cumple que (veáse la demostración 1.2)

$$-\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\| < \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle < \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|,$$

y si los dos vectores son distintos del vector nulo tenemos

$$-1 \leq \frac{\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \, \|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\|} \leq 1.$$

Teniendo en cuenta que $|\cos(\theta)| \leq 1$ y el teorema 1.4 convenimos en definir el ángulo interno que forman dos vectores no nulos como

Definición 1.2

Sean $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^q$; se define el agulo interno (agudo) θ que forman estos dos vectores como

$$\cos\theta \triangleq \frac{\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \rangle}{\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \, \|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\|}.$$

Dos vectores no nulos $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^q$ se dicen ortogonales si el ángulo interno que forman es $\theta = \pi/2$, lo cual, según la definición precedente, implica que $\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \rangle = 0$.

Definición 1.3 (Base de $\mathbb{R}^q$)

Todo conjunto formado por q vectores de $\mathbb{R}^q$ linealmente independientes, $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i,\ i = 1, 2, \ldots, q\right\}$, es una base de dicho espacio vectorial. Puede demostrarse que cualquier vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q$ puede descomponerse de forma única como una combinación lineal de los vectores de la base, es decir

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \alpha_1 \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_1 + \alpha_2 \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_2 + \cdots \alpha_q \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_q = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ son números reales. La combinación lineal anterior se llama descomposición del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ según la base y los números α_i se denominan componentes (o coordenadas) del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ en la base dada.

El hecho de que el vector se defina mediante las componentes α_i (en la base dada) se denota habitualmente como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q)\,,$$

y no será necesario precisar a qué base nos referimos siempre que esto no conduzca a ningún

tipo de ambigüedad.

Definición 1.4 (Bases ortogonales)

Una base del espacio euclídeo $\mathbb{R}^q$, $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i,\ i=1,2,\ldots,q\right\}$, *se dice que es ortogonal si sus vectores son ortogonales entre sí dos a dos, es decir*

$$\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_j \right\rangle = 0, \ \text{si} \quad 1 \leq i \neq j \leq q.$$

Si además se verifica que

$$\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_j \right\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i = j, \\ 0, & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases}$$

la base es ortonormal.

De forma más fundamental puede demostrarse que todo conjunto de vectores ortogonales entre sí dos a dos es siempre un sistema linealmente independiente y que en todo espacio vectorial existen bases ortogonales.

A lo largo de este curso sólo consideraremos bases de este tipo lo que nos permite aplicar una variedad de corolarios útiles. Sabemos que todo vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q$ admite una descomposición única

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x}} = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_j.$$

Multiplicando escalarmente la igualdad anterior por el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i$ resulta

$$\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_j, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\rangle = \alpha_i \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2,$$

por lo que podemos despejar la componente α_i

$$\alpha_i = \frac{\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

y utilizando la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo que forman

$$\alpha_i = \frac{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\| \cos\theta_i}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2} = \frac{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \right\| \cos\theta_i}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_i \right\|},$$

donde θ_i es el ángulo agudo que forman el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ y el i-ésimo vector de la base. Si para otro vector $\overrightarrow{\boldsymbol{y}}$ tiene lugar la descomposición

$$\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \sum_{j=1}^{q} \beta_j \overrightarrow{\boldsymbol{b}}_j,$$

entonces el producto escalar de ámbos vectores puede escribirse como

$$\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{\boldsymbol{b}}_i, \sum_{j=1}^{q} \beta_j \vec{\boldsymbol{b}}_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{q} \alpha_i \beta_j \left\langle \vec{\boldsymbol{b}}_i, \vec{\boldsymbol{b}}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \beta_i \left\| \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2.$$

En particular la norma del vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ se escribe

$$\|\vec{\boldsymbol{x}}\| = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2 \left\| \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2.$$

Si la base es ortonormal las expresiones anteriores se simplifican bastante ya que todas las normas se reducen a la unidad, es decir

$$\alpha_i = \left\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\rangle, \quad \langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}} \rangle = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \beta_i, \quad \|\vec{\boldsymbol{x}}\| = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^2.$$

Definición 1.5 (Proyección ortogonal)

El vector

$$\vec{\boldsymbol{P}}_i = \alpha_i \vec{\boldsymbol{b}}_i = \frac{\left\langle \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\rangle}{\left\| \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\|^2} \vec{\boldsymbol{b}}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q,$$

se denomina proyección ortogonal del vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ sobre el vector $\vec{\boldsymbol{b}}_i$

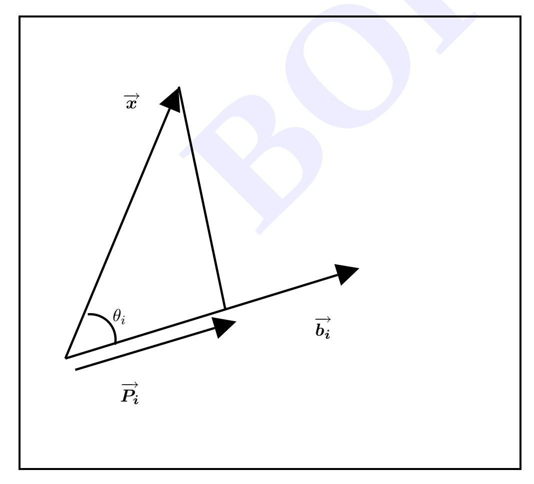


Figura 1.6: Proyeccion ortogonal

Para comprender el significado del vector $\vec{\boldsymbol{P}}_i$ consideremos, tal como se muestra en la figura, los dos vectores $\vec{\boldsymbol{x}}$ y $\vec{\boldsymbol{b}}_i$. Trazamos un segmento de recta que pasa por el extremo del vector $\vec{\boldsymbol{x}}$ y que corta perpendicularmente a la recta definida por el vector $\vec{\boldsymbol{b}}_i$; el segmento dirigido que parte del origen de coordenadas y termina en la intersección es $\vec{\boldsymbol{P}}_i$. No resulta muy difícil comprobarlo: el segmento dirigido en cuestión es paralelo al vector unitario $\vec{\boldsymbol{b}}_i / \left\| \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\|$ y tiene como longitud (orientada) $\|\vec{\boldsymbol{x}}\| \cos\theta_i$, esto es

$$(\|\vec{\boldsymbol{x}}\| \cos\theta_i) \frac{\vec{\boldsymbol{b}}_i}{\left\| \vec{\boldsymbol{b}}_i \right\|} = \alpha_i \vec{\boldsymbol{b}}_i = \vec{\boldsymbol{P}}_i.$$

Trabajaremos habitualmente con la base estándar, cuyos elementos se denotan por $\{\vec{\boldsymbol{e}}_i \setminus . \ i = 1, 2, \cdots, q\}$. Se trata de vectores unitarios definidos de tal forma que $\vec{\boldsymbol{e}}_i$ está dirigido según el sentido positivo del i-ésimo eje de coordenadas. Los vectores de la base estándar forman por definición un sistema ortonormal, esto es, $\left\langle \vec{\boldsymbol{e}}_i, \vec{\boldsymbol{e}}_j \right\rangle = \delta_{i,j}$. Cuando trabajemos en el plano o en el espacio, los tres vectores de la base estándar $\vec{\boldsymbol{e}}_1$, $\vec{\boldsymbol{e}}_2$ y $\vec{\boldsymbol{e}}_3$ se denotarán frecuentemente

por los símbolos $\overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{\jmath}$ y $\overrightarrow{k}$ respectivamente. También es habitual en este caso denotar las coordenadas cartesianas de un punto por x, y, z en lugar de x_1, x_2, x_3.

Ejemplo 1.2 (Ángulos directores de un vector)

Llamamos ángulos directores de un vector a los ángulos internos entre éste y los vectores $\overrightarrow{b}_i$ de la base. Según hemos visto en la sección precedente la descomposición de un vector en una base se puede expresar como

$$\overrightarrow{x} = \left(\frac{\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_i}{\left\|\overrightarrow{b}_1\right\|}, \frac{\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_2}{\left\|\overrightarrow{b}_2\right\|}, \cdots, \frac{\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_q}{\left\|\overrightarrow{b}_q\right\|} \right),$$

es decir,

$$\alpha_i = \frac{\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_i}{\left\|\overrightarrow{b}_i\right\|},$$

y como por otra parte

$$\alpha_i = \frac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}_i \right\rangle}{\left\|\overrightarrow{b}_i\right\|^2},$$

resulta que

$$\cos\theta_i = \frac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}_i \right\rangle}{\|\overrightarrow{x}\| \left\|\overrightarrow{b}_i\right\|}.$$

Obviamente, si la base es ortonormal

$$\overrightarrow{x} = \left(\|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_1, \|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_2, \cdots, \|\overrightarrow{x}\| \cos\theta_q\right),$$

y

$$\cos\theta_i = \frac{\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{b}_i \right\rangle}{\|\overrightarrow{x}\|}.$$

Utilizando estas expresiones obtendremos los ángulos directores del vector $\overrightarrow{x} = (1,2,3)$, en la base estándar $\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}$. La norma del vector se calcula como $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$. Prosiguiendo con el cálculo tenemos

$$\begin{array}{llll}
\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\imath} \rangle = 1 & \rightarrow \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} & \rightarrow \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) & \simeq 1.30 \\
\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\jmath} \rangle = 2 & \rightarrow \cos\theta_1 = \frac{2}{\sqrt{14}} & \rightarrow \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) & \simeq 1.00 \\
\left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{k} \right\rangle = 3 & \rightarrow \cos\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{14}} & \rightarrow \theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) & \simeq 0.64
\end{array}$$

1.2.3 Volumen de un sistema de vectores

Como paso previo a la definición del (hiper)volumen subtendido por un cierto conjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$ debemos introducir el producto vectorial y el producto mixto.

Definición 1.6 (Producto vectorial en $\mathbb{R}^3$)

*Dados dos vectores $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, definimos su **producto vectorial** como el nuevo vector:*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \triangleq \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k}$$

Conviene notar aquí que la primera identidad tiene un marcado caracter formal y sólo adquiere sentido real cuando el determinante se desarrolla por la primera fila.

Teorema 1.5 (Propiedades del producto vectorial)

El producto vectorial de dos vectores del plano o del espacio verifica las siguientes propiedades:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$*; en consecuencia* $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
2. $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \operatorname{sen}\theta$*, donde* θ *es el ángulo agudo que forman los dos vectores. Por lo tanto la norma del producto vectorial es igual al área del paralelogramo subtendida por los vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.
3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
4. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
5. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
6. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle\, \vec{b} - \left\langle\vec{a}, \vec{b}\right\rangle \vec{c}$.

Demostración 1.5

Las propiedades 1, 3, 4 y 5 se deducen de forma directa a partir de las propiedades de los determinantes; aconsejamos al lector que utilice sus conocimientos de álgebra (y cierta fuerza de voluntad) para demostrarlas. La demostración de la última propiedad se plantea como problema al final del capítulo, con lo que nos contentaremos aquí con demostrar la propiedad número 2.

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \cdots \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 - \left\langle\vec{a}, \vec{b}\right\rangle^2 = \|\vec{a}\|^2 \left\|\vec{b}\right\|^2 \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Como θ es el ángulo agudo formado por los dos vectores y $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ si $\theta \in [0, \pi]$ podemos escribir

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \operatorname{sen}\theta.$$

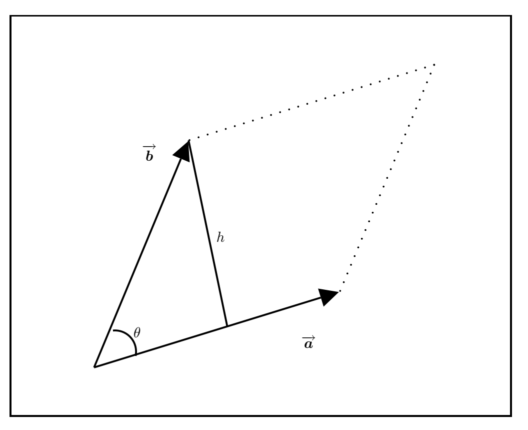


Figura 1.7: Área de un paralelogramo

No resulta muy arduo convencerse de que el miembro de la derecha nos proporciona el área del paralelogramo definido por los dos vectores. Imaginemos tal como muestra la figura, los dos vectores reducidos al origen y completado el paralelogramo mediante otros dos vectores paralelos a los originales. Si tomamos como base del paralelogramo al vector $\vec{a}$ la altura del mismo viene dada trivialmente por $\left\|\vec{b}\right\| \operatorname{sen}\theta$ con lo cual $A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \operatorname{sen}\theta$.

Definición 1.7 (Producto mixto en $\mathbb{R}^3$)

Dados tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del espacio, el número real

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle,$$

se llama producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ (en dicho orden).

Teorema 1.6 (Propiedades del producto mixto)

Las propiedades básicas del producto mixto de tres vectores del espacio $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ son:

1. $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$
2. *El producto mixto es invariante bajo permutaciones cíclicas*
$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{c} \times \vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{c}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle.$$
3. *El producto mixto de tres vectores linealmente dependientes o coplanares es nulo, es decir* $\left\langle \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = 0$.

Demostración 1.6

1. La primera propiedad se demuestra de forma directa a partir de la definición

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \left\langle a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}, \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\vec{k} \right\rangle$$
$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2,3 Estas propiedades se deducen subsidiariamente de la primera utilizando determinantología elemental.



Ejemplo 1.3

Utilizaremos el producto mixto para demostrar que los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (1, 4, -7)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (2, -1, 4)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (0, -9, 18)$, son coplanares. Utilizando la forma determinantal del producto mixto tenemos

$$\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{c}} \right\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} = 0,$$

y de acuerdo con la tercera propiedad del producto mixto deducimos la coplanariedad de los vectores.



Teorema 1.7 (Volumen de un paralelepípedo)

EL producto mixto $\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{c}} \right\rangle$ *es, salvo un signo, igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los tres vectores* $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ *y* $\overrightarrow{\boldsymbol{c}}$, *reducidos a un origen común.*

Según afirma el teorema precedente, el volumen del paralelepípedo Ω construido a partir de los tres vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{c}} = (c_1, c_2, c_3)$ viene dado por

$$V(\Omega) = \left| \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{a}}, \overrightarrow{\boldsymbol{b}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{c}} \right\rangle \right| = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix} \right\|.$$

Demostración 1.7

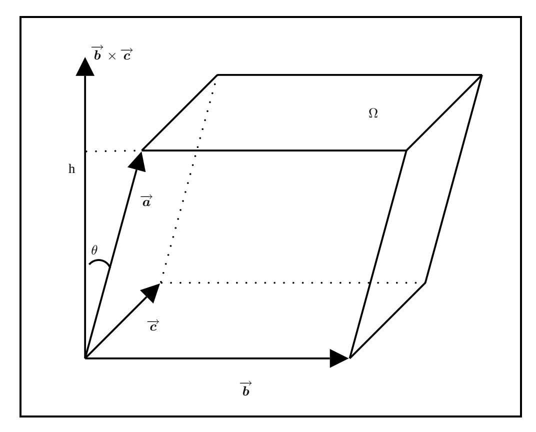


Figura 1.8: Volumen de un paralelepípedo

Considérese el sistema formado por los tres vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que parten de un mismo punto; dicho sistema permite construir, tal como se muestra en la figura, un paralelepípedo. Los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman la base del paralelepípedo cuyo área es $A = \left\| \vec{b} \times \vec{c} \right\|$. Si θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b} \times \vec{c}$ (ortogonal a la base), la altura del paralelepípedo viene dada por $h = \|\vec{a}\| \, |\cos\theta|$. Así el volumen se escribe

$$V(\Omega) = Ah = \left\| \vec{b} \times \vec{c} \right\| \|\vec{a}\| \, |\cos\theta| \, ,$$

y aplicando la definción del coseno del ángulo formado por dos vectores, resulta

$$V(\Omega) = \left| \left\| \vec{b} \times \vec{c} \right\| \|a\| \cos\theta \right| = \left| \left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle \right|.$$

Las definiciones de los productos vectorial y mixto en el espacio, se pueden generalizar sin gran dificultad al caso de un espacio de dimensión arbitraria

Definición 1.8 (Producto vectorial en $\mathbb{R}^q$)

Dados $q-1$ vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_{q-1}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^q (q \geq 3)$ se define su producto vectorial como

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_{q-1} \triangleq \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_q \\ v_{1_1} & v_{1_2} & \cdots & v_{1_q} \\ v_{2_1} & v_{2_2} & \cdots & v_{2_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(q-1)_1} & v_{(q-1)_2} & \cdots & v_{(q-1)_q} \end{vmatrix}$$

Se trata de una definición formal cuyo significado es el siguiente: el vector que denominamos producto vectorial tiene por componentes los números que resultan de desarrollar el determinante anterior por su primera fila.

También es este caso las propiedades más importantes del producto vectorial general son consecuencia directa de las propiedades de los determinantes; en entre ellas destacaremos las

que se enuncian en el siguiente teorema

Teorema 1.8 (Propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^q$)

1. $\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_j \times \cdots = -\vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_j \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots$; *en particular, el producto vectorial se anula cuando el mismo vector se repite dos o más veces*
2. $\vec{v}_1 \times \cdots \times (\lambda \vec{v}_i) \times \cdots \times \vec{v}_{q-1} = \lambda \vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \times \vec{v}_{q-1}$.
3. $\vec{v}_1 \times \cdots \times (\vec{u}_i + \vec{v}_i) \times \cdots = \begin{matrix} \vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{u}_i \times \cdots + \\ \vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \end{matrix}$

Las dos últimas propiedades se puden resumir en una sola que establece la linealidad del producto vectorial en cualquiera de sus argumentos

Definición 1.9 (Producto mixto en $\mathbb{R}^q$)

Dados q vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots \vec{v}_q$ pertenecientes a $\mathbb{R}^q (q \geq 3)$ se define su producto mixto como el número

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_q \rangle \triangleq \begin{vmatrix} v_{1_1} & v_{1_2} & \cdots & v_{1_q} \\ v_{2_1} & v_{2_2} & \cdots & v_{2_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(q-1)_1} & v_{(q-1)_2} & \cdots & v_{(q-1)_q} \\ v_{q_1} & v_{q_2} & \cdots & v_{q_q} \end{vmatrix}$$

Como en los casos anteriores, las propiedades del producto mixto se obtienen de forma directa a partir de su definición como un determinante

Teorema 1.9 (Propiedades del producto mixto en $\mathbb{R}^q$)

1. *El producto mixto es invariante bajo permutaciones cíclicas de sus argumentos*

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \cdots \times \vec{v}_q \rangle = \langle \vec{v}_q, \vec{v}_1 \times \cdots \times \vec{v}_{q-1} \rangle .$$

2. *El producto mixto es lineal en todos y cada uno de sus argumentos, es decir*

$$\langle \vec{v}_1, \cdots \times (\alpha \vec{u}_i + \beta \vec{v}_i) \times \cdots \rangle = \alpha \langle \vec{v}_1, \cdots \times \vec{u}_i \times \cdots \rangle + \beta \langle \vec{v}_1, \cdots \times \vec{v}_i \times \cdots \rangle .$$

Cuando dos vectores del plano se reducen a un mismo punto definen un paralelogramo cuyo área A podemos obtener utilizando la propiedad 1.5 (2); análogamente tres vectores del espacio situados sobre el mismo origen definen un paralelepípedo cuyo volumen V viene dado por el teorema 1.7 . En $\mathbb{R}^q$ ($q > 3$), q vectores reducidos a un mismo punto definen un hiperparalelepípedo que contiene un cierto hipervolumen. De ahora en adelante para referirnos de forma indistinta al área, al volumen o al hipervolumen de una región utilizaremos la palabra «medi-

da», que denotaremos por la letra griega μ. En su momento definiremos de forma más precisa el concepto de medida de ciertas regiones de $\mathbb{R}^q$; de momento nos basta con saber que si $q = 2$, entonces $\mu = A$, y si $q = 3$ entonces $\mu = V$.

Definición 1.10 (Volumen de un hiperparalelepípedo)

La medida del (hiper)paralelepípedo Ω formado por los q vectores $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{v}}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{iq})\right\}_{i=1,2,\ldots,q}$ (con $q \geq 2$) se define como

$$\mu(\Omega) \triangleq \left\| \begin{matrix} v_{1_1} & v_{1_2} & \cdots & v_{1_q} \\ v_{2_1} & v_{2_2} & \cdots & v_{2_q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(q-1)_1} & v_{(q-1)_2} & \cdots & v_{(q-1)_q} \\ v_{q_1} & v_{q_2} & \cdots & v_{q_q} \end{matrix} \right\|$$

Cuando $q \geq 3$ el volumen puede reescribirse como un producto mixto

$$\mu(\Omega) = \left|\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_2 \times \cdots \times \overrightarrow{\boldsymbol{v}}_q \right\rangle\right|$$

Ejemplo 1.4

Demostremos que el área del paralelogramo Δ construido sobre los dos vectores (a_1, a_2) y (b_1, b_2) viene dada por

$$A(\Delta) = \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

Comenzaremos transformando los dos vectores en elementos de $\mathbb{R}^3$ añadiendo para ellol una tercera componente nula, es decir

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{a}} &\longrightarrow (a_1, a_2, 0), \\ \overrightarrow{\boldsymbol{b}} &\longrightarrow (b_1, b_2, 0). \end{aligned}$$

Sabemos que el área del paralelogramo Δ es igual a la norma del producto vectorial de los dos vectores, es decir

$$A(\Delta) = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{b}}\right\| = \left\| \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} & \overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} \right\|,$$

y desarrollando el determinante por la primera fila

$$A(\Delta) = \left\| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \right\| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \right\| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|.$$

1.3 Clasificación de los subconjuntos de $\mathbb{R}^q$

1.3.1 Bolas en $\mathbb{R}^q$

Los intervalos unidimensionales, abiertos (a, b) o cerrados $[a, b]$, tienen una gran importancia en el análisis de la recta real $\mathbb{R}$. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^q$ existen subconjuntos que juegan un papel similar al de los intervalos unidimensionales. Los más importantes son las bolas y los intervalos generalizados en q dimensiones. A modo de ejemplo podemos decir que el concepto de bola nos permitirá, en su momento, introducir de manera sencilla los límites de funciones reales definidas en $\mathbb{R}^q$. Por su parte, los intervalos juegan en la mayor parte de los textos de cálculo un papel importante en la definición de la integral de Riemann en más de una dimensión.

Definición 1.11 (Bolas en $\mathbb{R}^q$)

- *Se llama* ***bola abierta*** *de centro* $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^q$ *y radio* $\rho > 0$ *al conjunto:*

$$B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q \ \backslash . \ d\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) < \rho\right\}.$$

- *Análogamente se denomina* ***bola cerrada*** *de centro* $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^q$ *y radio* $\rho > 0$ *al conjunto:*

$$\overline{B}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right) = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q \ \backslash . \ d\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \leq \rho\right\}.$$

- *Por último se llama* ***bola reducida*** *de centro* $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^q$ *y radio* $\rho > 0$ *a:*

$$B^*\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right) = B - \{\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\} = \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q \ \backslash . \ 0 < d\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) < \rho\right\}.$$

De ahora en adelante, cuando se afirme que una función posee determinada propiedad «cerca del punto» $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ o en la «vecindad del punto» $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ el lector deber interpretar que existe un radio positivo $\rho > 0$ de tal suerte que en todos los puntos de la bola $B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right)$ se cumple la propiedad mencionada.

La figura 1.9 representa tres ejemplos de bolas en el plano. En $\mathbb{R}^2$ es habitual denominar discos (abiertos, cerrados y reducidos) a las bolas. En la recta real las bolas se reducen a simples intervalos unidimensionales. Introducimos en este ejemplo un convenio que emplearemos habitualmente en el futuro: los discos abiertos se representan mediante líneas discontinuas mientras que los cerrados vienen delimitados por líneas continuas.

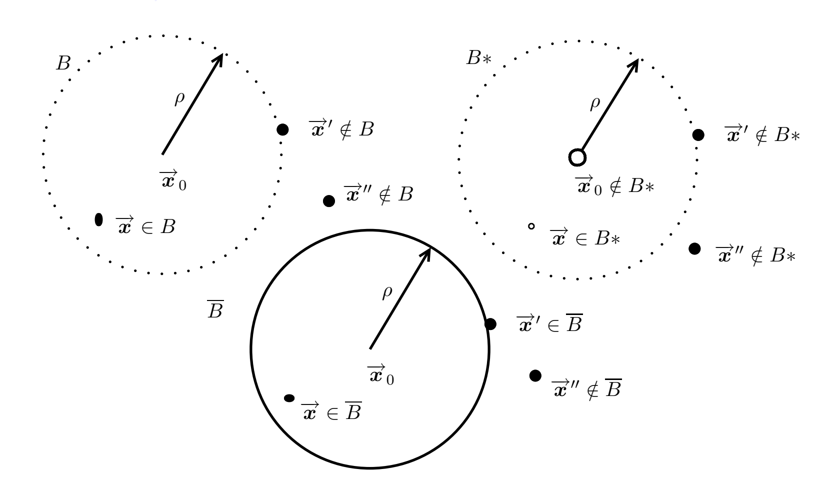


Figura 1.9: Bolas en el plano

Propiedades de las bolas

A continuación enumeraremos sin demostración algunas de las propiedades más importantes de este tipo de conjuntos; en lugar de una demostración nos bastará con mostrar un gráfico justificativo.

1. Dados $\vec{\boldsymbol{x}}_0, \vec{\boldsymbol{y}}_0 \in \mathbb{R}^q,\ (\vec{\boldsymbol{x}}_0 \neq \vec{\boldsymbol{y}}_0),\ \exists \rho, \sigma > 0 \setminus.\ B\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right) \cap B\left(\vec{\boldsymbol{y}}_0, \sigma\right) = \varnothing$

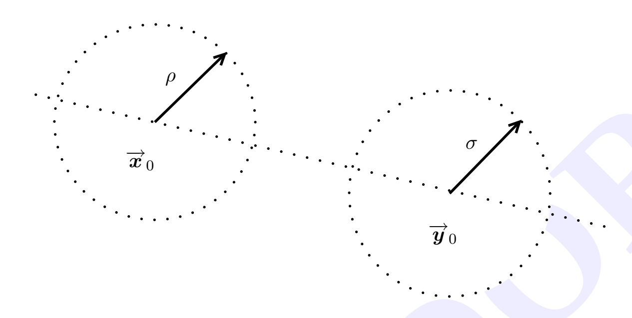


Figura 1.10: Propiedades de las bolas 1

2. Si $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathbb{R}^q$ y $\vec{\boldsymbol{x}} \in B\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right)$, $\exists \sigma > 0 \setminus.\ B\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \sigma\right) \subset B\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \rho\right)$

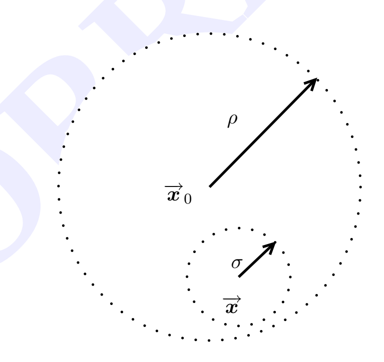


Figura 1.11: Propiedades de las bolas 2

1.3.2 Intervalos en $\mathbb{R}^q$

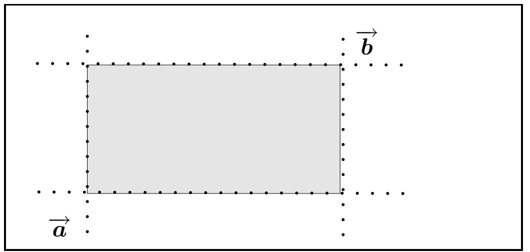


Figura 1.12: Intervalo en el plano

El concepto de intervalo se puede generalizar sin esfuerzo a un número cualquiera de dimensiones de tal suerte que estos subconjuntos guarden una fuerte similitud con los intervalos de la

recta real. Utilizaremos la siguiente definición

Definición 1.12 (Intervalos en $\mathbb{R}^q$)

1. *Dados* $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_q)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_q)$, *ambos pertenecientes a* $\mathbb{R}^q$, *se llama intervalo abierto al subconjunto:*

$$I\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^q \setminus . \; a_i < x_i < b_i \forall i\right\}.$$

   Un intervalo abierto en q *dimensiones se puede expresar como el producto cartesiano de* q *intervalos unidimensionales abiertos de la recta real, es decir*

$$I\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_q, b_q).$$

2. *Análogamente se denomina intervalo cerrado al subconjunto:*

$$\overline{I}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^q \setminus . \; a_i \leq x_i \leq b_i \forall i\right\},$$

   o

$$\overline{I}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_q, b_q].$$

Ejemplo 1.5 (Primeros ejemplos de intervalos)

Veamos algunos ejemplos sencillos de intervalos en dos dimensiones:

- $I\left((2,3),(4,5)\right) = (2,3) \times (4,5) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus . \; 2 < x < 4, 3 < y < 5\right\}$.
- $\overline{I}\left((2,3),(4,5)\right) = [2,3] \times [4,5] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus . \; 2 \leq x \leq 4, 3 \leq y \leq 5\right\}$.

1.3.3 Conjuntos abiertos, cerrados y compactos

Después de un cuatrimestre de Cálculo los conceptos de intervalo abierto y cerrado serán familiares al lector. Es fundamental que generalicemos estos conceptos al caso de subconjuntos genéricos de $\mathbb{R}^q$. Nos limitaremos, no obstante, a las cuestiones más básicas que utilizaremos a lo largo del curso: dé por hecho el lector que los conceptos que vamos a introducir ahora no son más que la «parte visible de un iceberg de conocimiento denominado topología». Tendremos la oportunidad de comprobar que muchas propiedades de las funciones multivariable, enunciadas como teoremas, sólo son válidas en dominios abiertos; otras por el contrario requieren que el dominio sea cerrado.

Definición 1.13 (Puntos interiores, exteriores y frontera)

Sean un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ *y su complementario* $\mathbb{R}^q - \Omega$*. Dado* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^q$ *se dice que:*

1. $\vec{x}_0$ *es un punto interior de* Ω *si* $\exists\, \epsilon > 0 \setminus.\ B\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \subset \Omega$.
2. $\vec{x}_0$ *es un punto exterior de* Ω *si* $\exists\, \epsilon > 0 \setminus.\ B\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \subset \mathbb{R}^q - \Omega$.
3. $\vec{x}_0$ *es un punto frontera de* Ω *si* $\forall\, \epsilon > 0$ *se cumple simultáneamente que*

$$\begin{cases} B\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \cap \Omega & \neq \varnothing, \\ B\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \cap (\mathbb{R}^q - \Omega) & \neq \varnothing. \end{cases}$$

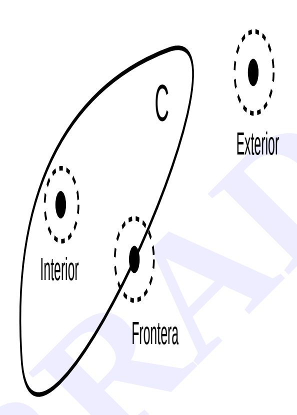


Figura 1.13: Puntos interiores, exteriores y frontera

De la definición anterior se deduce que todo punto exterior de Ω es un punto interior de su complementario $\mathbb{R}^q - \Omega$. Es importante destacar que en la definición de punto interior (exterior) de un conjunto basta con que exista una (sola) bola de radio $\epsilon > 0$ que satisfaga la condición correspondiente para que el punto sea interior (exterior). Por el contrario la definición de punto frontera es mucho más restrictiva; debe cumplirse que, cualquiera que sea el radio, la bola centrada en el punto $\vec{x}_0$ contenga de forma simultánea puntos pertecientes a Ω y puntos que no pertenecen a dicho conjunto.

Definición 1.14 (Puntos adherentes y de acumulación)

Sea un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ *y un punto* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^q$*, se dice que:*

1. $\vec{x}_0$ *es un punto adherente de* Ω *si* $\forall\, \epsilon > 0,\ B\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \cap \Omega \neq \varnothing$.
2. $\vec{x}_0$ *es un punto de acumulación de* Ω *si* $\forall\, \epsilon > 0,\ B^*\left(\vec{x}_0, \epsilon\right) \cap \Omega \neq \varnothing$.

Las definiciones de punto frontera, adherente y de acumulación pueden confundirse ya que sus diferencias son sutiles. Un punto $\vec{x}_0$ es adherente al conjunto Ω si toda bola centrada en $\vec{x}_0$ contiene puntos pertenecientes al conjunto; para que sea frontera debe contener además puntos que no pertencen a Ω. La distinción entre puntos adherentes y de acumulación es aún más sutil. Todo punto $\vec{x}_0 \in \Omega$ aislado es un punto adherente (y frontera), pero no lo es de acumulación ya que existen bolas centradas en él que sólo contienen un punto de Ω: el propio $\vec{x}_0$

Una vez clasificados los puntos de $\mathbb{R}^q$ en los tipos interior, exterior y frontera con respecto a un determinado conjunto, conviene definir los conceptos de interior, exterior y frontera de dicho conjunto.

Definición 1.15 (Interior, frontera y exterior de un conjunto)

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, se definen los siguientes conjuntos relacionados:

1. *El interior de Ω es el conjunto $\mathring{\Omega}$ formado por todos los puntos interiores de Ω, es decir*

$$\mathring{\Omega} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^q \setminus . \ \vec{x} \text{ es punto interior de } \Omega\}.$$

2. *El exterior de Ω es el conjunto $Ex(C)$ formado por todos los puntos exteriores de Ω, es decir*

$$Ex(\Omega) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^q \setminus . \ \vec{x} \text{ es punto exterior de } \Omega\}.$$

3. *La frontera de Ω es el conjunto $\partial\Omega$ formado por todos los puntos frontera de Ω, es decir*

$$\partial C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^q \setminus . \ \vec{x} \text{ es punto frontera de } \Omega\}.$$

Una definición alternativa de Exterior de un conjunto es $Ex(\Omega) = \overbrace{\mathbb{R}^q - \Omega}^{\circ}$. Los conjuntos $\mathring{\Omega}$, $Ex(\Omega)$ y $\partial\Omega$ son una partición de $\mathbb{R}^q$ porque *todo punto de $\mathbb{R}^q$ es necesariamente* **una y sólo una** *de las siguientes cosas: o punto interior de Ω o punto exterior de Ω o punto frontera de Ω; es imposible que sea simultáneamente dos de ellas.* De manera más formal podemos enumerar algunas de las propiedades más importantes de estos conjuntos como sigue

Teorema 1.10 (Propiedades de los conjuntos $\mathring{\Omega}$, $Ex(\Omega)$ y $\partial\Omega$)

1. *Los conjuntos $\mathring{\Omega}$, $Ex(\Omega)$ y $\partial\Omega$ son disjuntos.*
2. $\mathbb{R}^q = \mathring{\Omega} \cup Ex(\Omega) \cup \partial\Omega$.

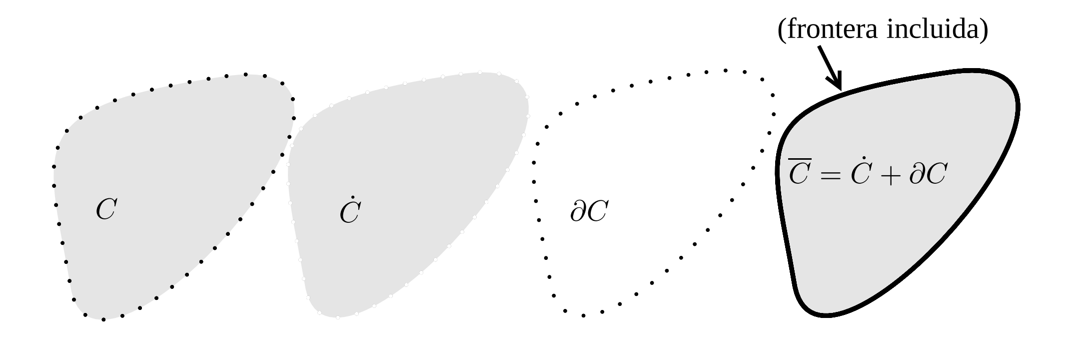


Figura 1.14: Interior, frontera y adherencia

La demostración de las propiedades anteriores se deja para los problemas del tema. Ahora definiremos la adherencia de un conjunto y su conjunto derivado

Definición 1.16 (Adherencia y derivado de un conjunto)

Dado un conjunto cualquiera $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, definimos también los siguientes conjuntos:

1. *La adherencia de Ω es el conjunto $\overline{\Omega}$ formado por todos los puntos de adherencia de Ω.*
2. *Se denomina conjunto derivado de Ω al conjunto Ω' formado por todos los puntos de acumulación de Ω.*

Todos punto interior o frontera de un conjunto pertenece a la adherencia del mismo. Asimismo los puntos interiores son puntos de acumulación del conjunto. Todo punto de acumulación es un punto adherente; sin embargo existen puntos de adherencia que no son de acumulación: éstos se denominan puntos aislados del conjunto.

Teorema 1.11 (Propiedades de $\overline{\Omega}$ y Ω')

La adherencia, frontera y derivado de un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ verifican que:

1. $\overline{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$.
2. $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Omega'$.
3. $\overline{\Omega} - \Omega' =$ *Conjunto de puntos aislados de* Ω.
4. $\mathring{\Omega} \subset \Omega'$.

Ejemplo 1.6

Dado el siguiente conjunto de puntos del plano

$$\Delta = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus.\ x_1 \neq n,\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

obtenga el interior, la frontera y la adherencia del mismo.

Tal como se observa en la definición Δ está formado por todos los puntos del plano excepto aquellos cuya primera coordenada es un número natural ($x_1 = 1, 2, \cdots$). No es díficil darse cuenta que son precisamente estos puntos los que constituyen la frontera de Δ: en **cualquier** entorno de los mismos hay simultáneamente puntos que pertencen y que no pertenecen a Δ. El resto de los puntos de $\mathbb{R}^2$, que constituyen Δ, forman el interior del conjunto ya que siempre podemos encontrar un entorno de los mismos que sólo contiene puntos de Δ. Por tanto conjunto e interior del conjunto coinciden en este caso. Además, el conjunto no contiene puntos aislados por lo que adherencia y conjunto derivados coinciden. Así

$$\mathring{\Delta} = \Delta,\ \partial\Delta = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \setminus.\ \ x_1 = n \in \mathbb{N}\right\},\ \overline{\Delta} = \Delta \cup \partial\Delta = \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio:
Dado el conjunto de puntos

$$\Delta = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus.\ x_1 = 1/n,\ x_2 = 1/m,\ n, m = 1, 2, \ldots\right\},$$

se propone como ejercicio que el lector encuentre sus puntos interiores, frontera, adherentes y de acumulación.

Finalmente, los conceptos de punto interior, exterior y frontera dan lugar a los de conjunto abierto y de conjunto cerrado, que son se exponen en la definición 1.18

Definición 1.17 (Conjuntos abiertos y cerrados)

- *Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ es abierto si todos sus puntos son interiores y ninguno de sus puntos frontera le pertenece, es decir, si $\Omega = \mathring{\Omega}$.*
- *Por el contrario, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ se dice que es cerrado si tanto sus puntos interiores como sus puntos frontera le pertenecen, es decir, si $\Omega = \overline{\Omega}$.*

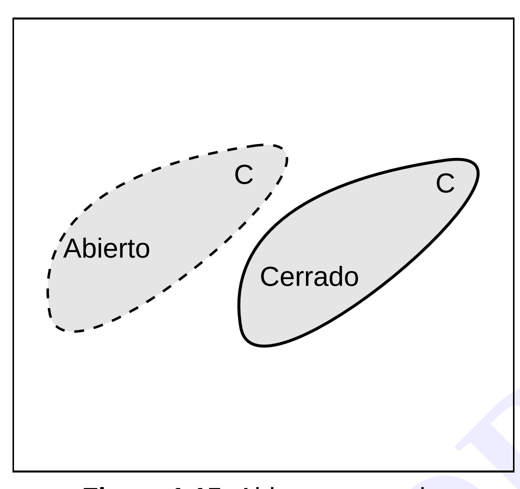


Figura 1.15: Abierto y cerrado

La figura lateral muestra dos conjuntos en el plano, uno abierto cuya frontera se representa mediante una línea a trazos, y otro cerrado delimitado por una línea continua. Se trata del convenio que establecimos para representar discos en el plano, y que de ahora en adelante utilizaremos para representar conjuntos genéricos del plano abiertos y cerrados.

La distinción entre conjuntos abiertos y cerrados es de gran importancia; por ejemplo las derivadas parciales (que estudiaremos más adelante) sólo pueden definirse en un punto interior del dominio de definición de una función. En consecuencia muchos teoremas y criterios, que se basan en el concepto o en las propiedades de las derivadas parciales, sólo son válidos en conjuntos abiertos.

El teorema 1.12 , que damos sin demostrarción, enumera las propiedades básicas de los conjuntos abiertos y cerrados en espacios euclídeos

Teorema 1.12 (Propiedades básicas de los abiertos y cerrados)

1. *$\mathbb{R}^q$ y $\varnothing$ son simultáneamente conjuntos abiertos y cerrados.*
2. *La unión de conjuntos abiertos (cerrados) es a su vez un conjunto abierto (cerrado).*
3. *La intersección de un número finito de abiertos (cerrados) es un conjunto abierto (cerrado).*
4. *Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, los conjuntos $\mathring{\Omega}$, $Ec(\Omega)$ son abiertos, y los conjuntos $\partial\Omega$ y $\overline{\Omega}$ son cerrados.*
5. *Para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, $\overline{\Omega}$ es el menor cerrado que contiene a Ω. Es decir, si Γ es cerrado y $\Omega \subset \Gamma$, entonces $\overline{\Omega} \subseteq \Gamma$.*
6. *Un conjunto Ω es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}^q - \Omega$ es abierto.*
7. *Un conjunto Ω es cerrado si y sólo si $\Omega' \subseteq \Omega$.*

Definición* 1.18 (Conjuntos compactos y conexos)

- *Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ se dice* ***compacto*** *si, además de ser cerrado, cumple que*

$$\exists\, \vec{\boldsymbol{x}} \in \Omega, \rho > 0 \ \backslash. \ \Omega \subset B\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \rho\right).$$

- *Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ se dice* ***conexo*** *si $\forall\, \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2 \in C$, existe (al menos) una curva que une dichos puntos y que está completamente contenida en Ω.*

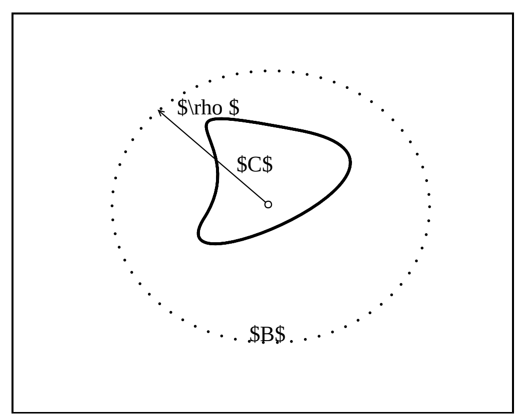


Figura 1.16: Conjunto compacto

Tal como se muestra en la figura adjunta al párrafo, un conjunto compacto es un conjunto cerrado que puede delimitarse mediante una bola de radio finito; en realidad, si el conjunto es compacto existen infinitas bolas de radio finito que contienen al conjunto. Ejemplos de conjuntos compactos son el intervalo $[a, b]$ de la recta real, cualquier disco de radio finito, etc. Por el contrario, la recta real, el plano o el espacio son ejemplos de conjuntos no compactos.

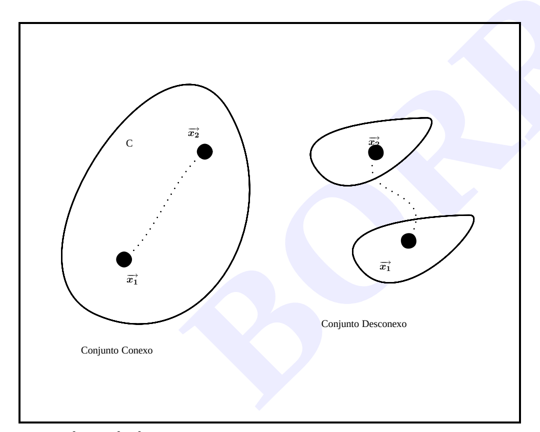


Figura 1.17: Conjuntos conexo y disconexo

En esta figura presentamos dos subconjuntos del plano: el de la izquierda es conexo ya que, dados dos puntos cualesquiera del mismo, siempre podemos encontrar una curva dentro del conjunto que va de un punto a otro; no sucede lo mismo en el conjunto de la derecha puesto que existen puntos que no se pueden conectar mediante ninguna curva que pertenezca integramente al conjunto.

Ejercicio:
En todos los casos obtenga el interior, la frontera y la adherencia de los conjuntos propuestos; además determine si el conjunto es abierto o cerrado, compacto y conexo:

1. $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ 0 < x \le 1,\, 0 \le y \le 1\right\}$.
2. $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \ z \ge x^2 + y^2\right\}$.

1.4 Primera toma de contacto con las funciones reales

En esta breve sección introducimos por primera vez las funciones reales definidas en espacios euclídeos de dimesión superior a uno. Dados dos espacios euclídeos $\mathbb{R}^q$ y $\mathbb{R}^p$, donde p y q son números naturales cualesquiera, podemos definir una función real como una regla que a todo

punto (o vector) $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \Delta \subset \mathbb{R}^q$ le asocia un punto (o vector) $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \in \mathbb{R}^p$. De manera más formal

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} : \Delta \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p \; ; \; (x_1, x_2, \cdots, x_q) \in \Delta \longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(x_1, x_2, \cdots, x_q)\,,$$

donde el «valor de la función» se expresa en términos de sus componentes como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\varphi_1\left(x_1, x_2, \cdots, x_q\right)\varphi_2\left(x_1, x_2, \cdots, x_q\right)\cdots, \varphi_p\left(x_1, x_2, \cdots, x_q\right)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Algunas comentarios pertinentes son:

- El subconjunto Δ donde la función toma valores se denomina **dominio de definición** de la función . El conjunto de valores (numéricos o vectoriales) que toma la función recibe el nombre de **imagen** de la misma.
- Si $p = 1$ la función se llama función **escalar** real de varias variables reales; es frecuente hablar simplemente de funciones reales de varias variables reales. En este caso la regla asocia a cada punto de $\mathbb{R}^q$ un número real. Un caso particular de estas funciones son las que se han estudiado en el primer cuatrimestre (donde $q = 1$).
- Si $p \geq 2$ la función recibe el nombre de función **vectorial** (de varias variables reales).
- Las funciones $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ se denominan componentes de la función.
- Dadas dos funciones $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}$ podemos definir las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rcl}(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}})(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) & = & \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) + \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}),\\ (\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})) & = & \lambda\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}),\\ (\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}})(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) & = & \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\phi}}(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^q \varphi_i(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \cdot \phi_i(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}).\end{array}$$

  En el caso de dos funciones escalares ($p = 1$) $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ y $g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ se pueden definir además

$$(fg)(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \;=\; f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})g(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}), \quad (f/g)(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}) \;=\; f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}})/g(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}).$$

Ejemplo 1.7

Consideremos los siguientes ejemplos:

- Un alambre rectilíneo se sitúa sobre el eje X del sistema de coordenadas del laboratorio y con su extremo izquierdo en $x = 0$. En este punto se coloca un mechero cuya llama calienta el alambre; transcurrido un tiempo prudencial se mide la temperatura del alambre a distintas distancias del origen. Es razonable pensar en la temperatura del alambre como una función T de la coordenada x, esto es

$$T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\; ; \; x \longrightarrow T\,(x)\,, \quad \forall x \geq 0.$$

- Repetimos el «experimento» anterior con una placa muy fina. Elegimos un sistema de referencia cuyo origen coincida con el vértice inferior izquierdo de la placa y tal que sus dos ejes X e Y coincidan con dos de los lados de la placa. A continuación se coloca el mismo mechero en el vértice que hace las veces de origen de coordenadas y calentamos la placa durante un cierto tiempo. Midiendo la temperatura de la placa en distintos puntos (x, y) obtenemos una idea de como varía sobre la placa. En este caso la temperatura es una función T de las coordenadas x e y, esto es

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\; ; \; (x, y) \longrightarrow T\,(x, y)\,, \quad \forall x, y \geq 0.$$

- La posición de una partícula (puntual) que se desplaza por el espacio nos proporciona un ejemplo de función vectorial

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}} : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \; ; \; t \longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) \; = (x\,(t)\,, y\,(t)\,, z\,(t))\,,$$

que a cada valor del tiempo t le asocia el vector de posición de la particula (con respecto a un cierto sistema de referencia).

- Otro ejemplo de funciones vectoriales lo proporcionan los campos electromagnético y gravitatorio. Consideremos una carga eléctrica Q que se encuentra situada en el origen de referencia que utilizamos en el laboratorio. El campo electrostático generado por la misma es

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; (x, y, z) \longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{E}}\,(x, y, z) \; = \mathcal{K}Q \frac{x\,\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + y\,\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde $\mathcal{K}$ es una constante que depende del sistema de unidades que estemos utilizando ($\mathcal{K} = 1$ en el sistema C.G.S. y $\mathcal{K} = 1/4\pi\epsilon_0$ en el M.K.S., siendo ϵ_0 la constante dieléctrica del vacio).



1.5 Curvas en $\mathbb{R}^q$

El objeto de nuestro estudio inmediato son las curvas y superficies en el espacio euclídeo. Una vez elegido un sistema de referencia, las coordenadas de los puntos ubicados sobre una curva o sobre una superficie no pueden ser arbitrarias, sino que deben obedecer correlaciones determinadas. Estas correlaciones se caracterizan mediante ecuaciones, escalares o vectoriales. Pasamos ahora a considerar de forma breve dichas ecuaciones

1.5.1 Rectas

La recta es el tipo de curva más sencillo que podemos encontrar en un espacio euclídeo. Obtendremos de manera simple algunas de las ecuaciones que la definen. Deduciremos primero la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$ para generalizarla posteriormente a un número cualquiera de dimensiones ($q \geq 2$).

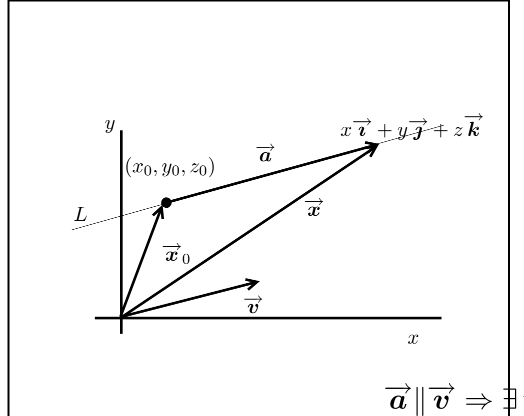


Figura 1.18: Definición de recta

Consideremos la recta L que pasa por el punto $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 = x_0\,\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + y_0\,\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + z_0\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{R}^3$ y es paralela al vector $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, v_3)$. Tal como se muestra en la figura cualquier punto $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} \in L$ puede escribirse como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{a}},$$

donde $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ es el vector con origen en $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0$ y extremo en $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$. Ahora bien,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \| \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \Rightarrow \exists t \in \mathbb{R} \setminus . \; \overrightarrow{\boldsymbol{a}} = t\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}},$$

y por lo tanto se verifica la siguiente relación

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = \overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 + t\,\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \; t \in \mathbb{R},$$

que recibe el nombre de **ecuación vectorial de la recta**.

En realidad, esta ecuación es válida cualquiera que sea el número de dimensiones con que trabajemos; la diferencia radica en que la descomposición en coordenadas o componentes es distinta. Sea $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_q)$ un punto genérico de la recta, $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0q})$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_q)$ el punto y el vector que definen la recta; entonces

Definición 1.19 (Ecuación vectorial de la recta)

La relación

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{v}, \; t \in \mathbb{R},$$

se denomina ecuación vectorial de la recta $L \subset \mathbb{R}^q$ que pasa por el punto $\vec{x}_0$ y tiene como vector director a $\vec{v}$

Al descomponer la ecuación vectorial en componentes obtenemos una representación alternativa de la recta. En efecto

Definición 1.20

El sistema de ecuaciones

$$x_1 = x_{0_1} + tv_1; \; x_2 = x_{0_2} + tv_2; \; \cdots ; \; x_q = x_{0_q} + tv_q, \quad t \in \mathbb{R},$$

*recibe el nombre de **ecuaciones paramétricas de la recta** L que pasa por $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0q})$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_q)$.*

Supongamos que $v_i \neq 0$ cualquiera que sea el valor del subíndice y que depejamos t en todas y cada una de las ecuaciones del sistema de ecuaciones paramétricas; entonces

$$t = \frac{x_1 - x_{0_1}}{v_1} = \frac{x_2 - x_{0_2}}{v_2} = \cdots = \frac{x_q - x_{0_q}}{v_q}.$$

Estas igualdades definen $q-1$ ecuaciones independientes llamadas **ecuaciones simétricas de la recta**. En tres dimensiones se escriben como

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

donde a, b y c son en este caso las componentes del vector director de la recta.

Ejercicio:
Dejamos como ejercicio para el lector la obtención de las ecuaciones simétricas si $a = 0$ y $b, c \neq 0$.

Tomando como ejemplo el resultado de este ejercicio estamos en disposición de dar el caso general, es decir, aquel en el que parte de las componentes del vector director son nulas

Definición 1.21

Sea $L \subset \mathbb{R}^q$ *la recta que pasa por* $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0q})$ *y tiene como vector director a* $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, \cdots, v_q)$*, cuyas componentes cumplen que* $v_{i_1} = v_{i_2} = \ldots v_{i_n} = 0$ *y* $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m} \neq 0$*, con* $n + m = q$*. Entonces, el sistema*

$$\begin{array}{ccccccc} \dfrac{x_{j_1} - x_{0_{j_1}}}{v_{j_1}} & = & \dfrac{x_{j_2} - x_{0_{j_2}}}{v_{j_2}} & = & \ldots & = & \dfrac{x_{j_m} - x_{0_{j_m}}}{v_{j_m}}, \\ x_{i_1} = x_{0_{i_1}} & ; & x_{i_2} = x_{0_{i_2}} & ; & \ldots & ; & x_{i_n} = x_{0_{i_n}}, \end{array}$$

recibe el nombre de ecuaciones simétricas de la recta.

Ejemplo 1.8 (Recta que pasa por dos puntos distintos)

Por supuesto, las ecuaciones anteriores no agotan las formas en las que podemos caracterizar una recta en el espacio (ni en $\mathbb{R}^q$ en general). Una de ellas consiste en expresar la recta como la intersección de dos planos, otra en proporciar las coordenadas de dos puntos por los que pasa la recta; en este último caso es trivial adaptar las ecuaciones simétricas.

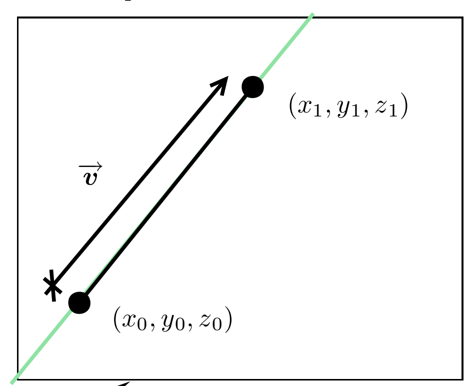


Figura 1.19: Recta que pasa por dos puntos

Puesto que conocemos dos puntos $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_1$ por los que pasa la recta, podemos utilizar como vector director el segmento dirigido que tiene origen en uno de los puntos y extremo en el otro; las componentes de tal vector se obtienen como sigue: $\vec{v} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Substituyendo este resultado en las ecuaciones simétricas, es decir, tomando $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$ y $c = z_1 - z_0$, resulta

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Para finalizar, es conveniente realizar un par de comentarios, que el lector atento ya habrá tenido en cuenta:

1. A diferencia de las ecuaciones simétricas, las ecuaciones paramétricas y la ecuación vectorial no sólo definen la recta sino que la dotan de una orientación, esto es, indican en qué orden se recorren los puntos de la misma. A medida que damos valores al parámetro t recorremos la curva según el sentido del vector director.

2. Independientemente de las dimensiones del espacio euclídeo, una recta viene caracterizada por un único grado de libertad, es decir, basta un parámetro real para describir las coordenadas de todos los puntos de la recta.

1.5.2 Ecuaciones vectoriales y paramétricas de una curva

Consideremos, para fijar ideas, una función vectorial continua

$$\vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\vec{\imath} + y\,(t)\,\vec{\jmath} + z\,(t)\,\vec{k} \;\;\backslash.\;\; t \in I \subset \mathbb{R},$$

cuyos valores son vectores de posición que fijan la posición de distintos puntos P del espacio. Aunque no hemos definido la continuidad de una función vectorial, el lector con conocimientos sobre las funciones de una variable podrá admitir sin dificultad que si la función es continua dos puntos P_1 y P_2, correspondientes a valores t_1 y t_2, se encontrarán tan próximos como se quiera sin más que exigir que $|t_1 - t_2| \ll 1$. Por tanto, es razonable afirmar que la imagen

$$C = \left\{ x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \in \mathbb{R}^3 \;\backslash.\; x = x(t), y = y(t), z = z(t),\; t \in I \right\},$$

de la función anterior define una curva en el espacio, que denotamos C y que no posee saltos ni agujeros. En numerosas ocasiones se utiliza la notación

$$C:\;\; \vec{r}\,(t) = x\,(t)\,\vec{\imath} + y\,(t)\,\vec{\jmath} + z\,(t)\,\vec{k},\; t \in I,$$

para señalar de forma simplificada que la curva C viene parametrizada por dicha función vectorial. Las ecuaciones

$$x = x(t);\;\; y = y(t);\;\; z = z(t),$$

reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de la curva C.

Para convencernos de que existe una relación muy estrecha entre funciones vectoriales y curvas en el espacio estudiaremos unos pocos ejemplos:

Ejemplo 1.9 (Parametrización de la recta)

Una recta es un caso especial de curva, quizá el más simple de todos. Hemos visto que las ecuaciones paramericas de la recta L que pasa por el punto $\vec{\boldsymbol{x}}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{v}} = (a, b, c)$ son $x = x_0 + at;\ y = y_0 + bt;\ z = z_0 + ct$, y en forma vectorial $L : \vec{\boldsymbol{r}}\,(t) = \vec{\boldsymbol{x}}_0 + t\vec{\boldsymbol{v}}, \quad t \in \mathbb{R}$.



Ejemplo 1.10 (Parametrización de la circunferencia de radio unidad)

Sea la función vectorial

$$\vec{\boldsymbol{r}}\,(t) = \cos(t)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \operatorname{sen}(t)\vec{\boldsymbol{\jmath}} + 0\vec{\boldsymbol{k}},\ t \in [0, 2\pi)\,.$$

De acuerdo con las ideas precedentes, la curva asociada tiene por ecuaciones paramétricas

$$x = cos(t);\ y = sen(t);\ z = 0.$$

Dado que $z = 0$ podemos restringirnos al plano XY. Para determinar de qué curva se trata vamos a efectuar una representación gráfica; elaboraremos una tabla con los valores de las coordenadas x e y de los puntos de la curva correspondientes a diversos valores seleccionados de t.

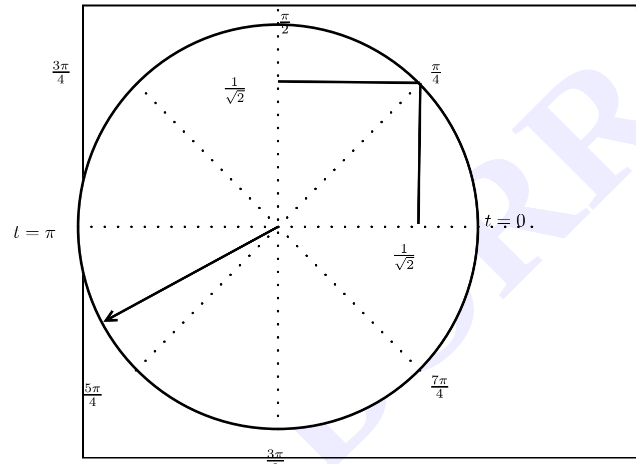


Figura 1.20: Función vectorial: Circunferencia

t	x	y	z
0	1	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1	0
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
π	-1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La representación en el plano de estos pocos puntos basta para darse cuenta de que es una circunferencia de radio $a = 1$ (además es una circunferencia orientada porque recorremos la curva en sentido contrario a las agujas del reloj, según vamos dando valores a t).

Aun podemos obtener una verificación adicional de que se trata de una circunferencia de radio unidad; en efecto

$$x^2(t) + y^2(t) = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1.$$

Ejemplo 1.11

En este ejemplo deduciremos la forma de la función vectorial que caracterice la curva C intersección del cilindro de radio 1 centrado sobre el eje Z ($x^2 + y^2 = 1$) y el plano de ecuación $y + z = 2$.

La figura 4.6 muestra de forma esquemática como se obtiene la curva C como intersección de las dos superficies. Resulta patente que la proyección de C sobre el plano XY coincide con la base del cilindro, que denominaremos C_{xy}

Según el ejemplo precedente una circunferencia en el plano se parametriza como

$$C_{xy} :\ \vec{\boldsymbol{r}}\,(t) = \cos(t)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \operatorname{sen}(t)\vec{\boldsymbol{\jmath}}\ \ \backslash.\ t \in [0, 2\pi)$$

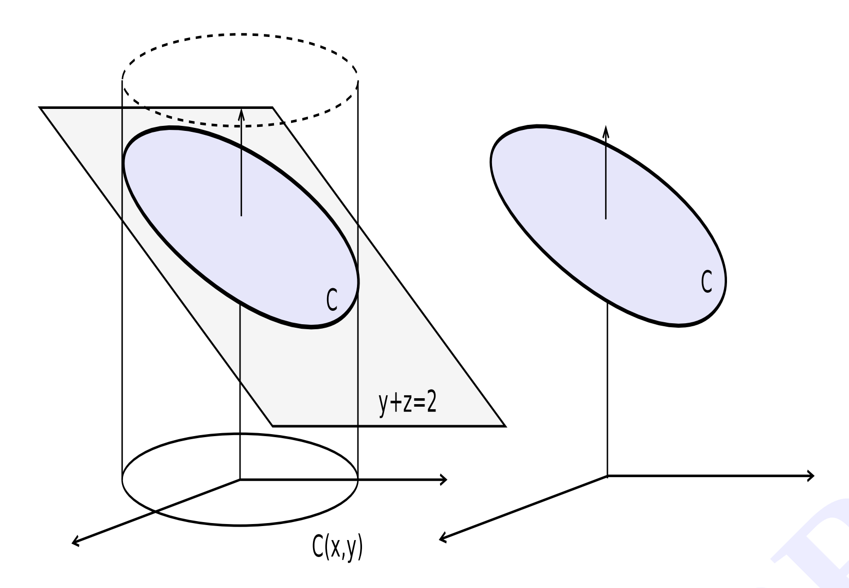


Figura 1.21: Intersección plano-cilindro

La diferencia entre los puntos de C y de C_{xy} radica en el valor de la coordenada z; utilizando la ecuación del plano podemos despejar z en función de y, con lo que obtenemos que $z = 2 - y$. Ahora bien, sobre C se cumple que $y = \operatorname{sen}(t)$, y por tanto las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = \cos(t); \; y = \operatorname{sen}(t); \; z = 2 - \operatorname{sen}(t),$$

lo que da lugar a la siguiente función vectorial

$$C : \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) \;= \cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + \operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 2_\operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \;\; \backslash. \;\; t \in [0, 2\pi).$$

Confiamos en que estos ejemplos hayan convencido al lector de que una curva en el espacio (o en el plano) puede caracterizarse mediante una función vectorial. Convenimos en dar una definición general de la siguiente forma

Definición 1.22 (Curva en el espacio euclídeo)

Una curva $C \subset \mathbb{R}^q$ es la imagen de una función vectorial, es decir

$$C = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q \;\; \backslash. \; x_1 = x_1\,(t)\,; \; x_2 = x_2\,(t)\,; \; \ldots; \; x_q = x_q\,(t)\,, \; t \in I \right\},$$

donde I es un intervalo de la recta real. De forma equivalente diremos que C está parametrizada por la función vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t)$, y lo denotaremos como

$$C : \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = x_1\,(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\,(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_2 + \cdots + x_q\,(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_q, \; t \in I,$$

o que sus ecuaciones paramétricas son

$$C : x_1 = x_1\,(t)\,; \; x_2 = x_2\,(t)\,; \; \ldots; \; x_q = x_q\,(t)\,, \quad t \in I.$$

Si las funciones $x_i\,(t)$ son continuas (si la función vectorial es continua) se dice que la curva C es continua.

Antes de dar por finalizado este apartado conviene realizar algunos comentarios sobre lo tratado aquí:

- En sentido estricto la definición precedente introduce el concepto de **curva hodógrafa** asociada a la función $\vec{r}(t)$. Es posible construir curvas más generales a partir de la unión de varias curvas de este tipo.
- La función vectorial no sólo define la curva como un lugar geométrico formado por puntos de $\mathbb{R}^q$, sino que la dota de una orientación.
- Independientemente de cuál sea la dimension del espacio euclídeo, las curvas están definidas por un sólo grado de libertad.

1.6 Superficies en $\mathbb{R}^q$

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^q$ puede definirse como el lugar geométrico formado por los puntos cuyas coordenadas satisfacen determinada ecuación de ligadura. Por lo tanto, dado que hacen falta q coordenadas para caracterizar univocamente un punto en $\mathbb{R}^q$, los puntos situados sobre una superficie solo poseen $q-1$ coordenadas independientes. Así, una superficie en $\mathbb{R}^q$ posee $q-1$ grados de libertad, y en particular, en el espacio sólo posee dos grados de libertad.

1.6.1 Planos

El ejemplo de superficie más sencillo es el plano. Existen diversas formas de caracterizar un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^q$. Una de ellas consiste en dar un punto $\vec{x}_0$ perteneciente al plano y un vector $\vec{n}$ ortogonal al mismo. Trabajaremos primero el caso de un plano en $\mathbb{R}^3$, para luego generalizar las expresiones obtenidas a un número superior de dimensiones. Dados

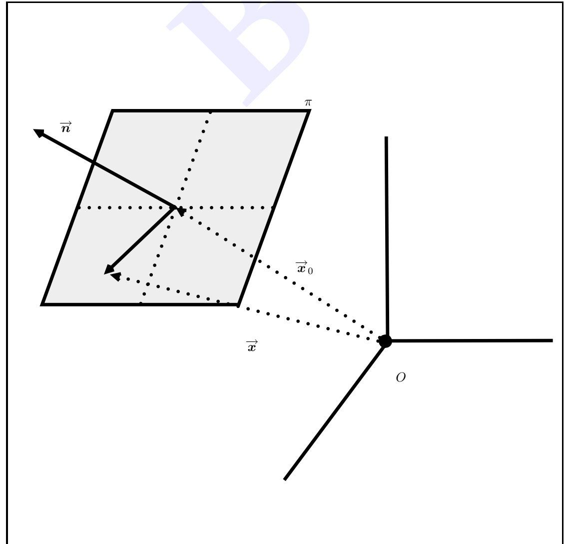


Figura 1.22: Definición de plano

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0)\,, \\ \vec{n} &= (n_x, n_y, n_z), \end{aligned}$$

y un punto genérico $\vec{r} = (x, y, z) \in \Pi$ se cumple que

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \perp \vec{n},$$

es decir

$$\langle (\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{n} \rangle = 0,$$

expresión que se denomina **ecuación vectorial** del plano. Para obtener una ecuación escalar escribiremos explícitamente las componentes de los vectores, es decir

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - z_0), (n_x, n_y, n_z) \rangle = 0,$$

con lo cual llegamos a

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0,$$

ó bien

$$n_x x + n_y y + n_z z + d = 0,$$

con $d = -(n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0)$.

Cualquiera de estas ecuaciones representa la ligadura que deben satisfacer las coordenadas de los puntos situados sobre el plano. Como los punto del espacio están caracterizados por tres coordenadas, la ecuación del plano introduce una correlación que reduce el número de coordenadas independientes a sólo dos: es decir, tal como hemos comentado al principio de la sección un plano en el espacio está caracterizado por dos grados de libertad.

Ejemplo 1.12 (Otras ecuaciones del plano en $\mathbb{R}^3$)

Sean $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ son dos vectores paralelos al plano Π de forma que su producto vectorial nos proporciona un vector normal al mismo, esto es

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \perp \Pi.$$

En consecuencia la ecuación vectorial del plano se podrá escribir como

$$\langle \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0, \vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} \rangle = 0,$$

donde reconocemos en el miembro de la izquierda el producto mixto de los tres vectores $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0$, $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$. Utilizando la descomposición en componentes de los vectores $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} &= (u_1, u_2, u_3), \\ \vec{\boldsymbol{v}} &= (v_1, v_2, v_3), \end{aligned}$$

la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta expresión refleja el hecho de que los tres vectores $\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0$, $\vec{\boldsymbol{u}}$ y $\vec{\boldsymbol{v}}$ son coplanares y que por tanto el volumen del paralelepípedo que definen es nulo.

Otra forma de caracterizar un plano consiste en identificar tres puntos no colineales pertenecientes al mismo; supongamos, por fijar ideas, que esos puntos son

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{r}}_0 &= (x_0, y_0, z_0), \\ \vec{\boldsymbol{r}}_1 &= (x_1, y_1, z_1), \\ \vec{\boldsymbol{r}}_2 &= (x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Partiendo de ellos es posible construir dos vectores no colineales y paralelos el plano, es decir

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{u}} &= \vec{\boldsymbol{r}}_1 - \vec{\boldsymbol{r}}_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\ \vec{\boldsymbol{v}} &= \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_0 = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \end{aligned}$$

lo cual da lugar a la siguiente forma de la ecuación del plano

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

La generalización a una dimensión arbitraria q (con $q > 2$) no presenta ninguna dificultad especial; la diferencia sólo afecta a la descomposición en componentes (coordenadas) de los vectores (puntos) involucrados

Definición 1.23

Sea $\Pi \subset \mathbb{R}^q$ un plano contenido en el espacio euclídeo de dimensión q; si $\vec{\boldsymbol{x}}_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0q})$ es un punto perteneciente al plano y $\vec{\boldsymbol{n}} = (n_1, n_2, \cdots, n_q)$ un vector normal al mismo, la ecuación vectorial del plano es

$$\langle(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0), \vec{\boldsymbol{n}}\rangle = 0,$$

que desarrollada en componentes da lugar a la siguiente ecuación escalar

$$n_1(x_1 - x_{0_1}) + n_2(x_2 - x_{0_2}) + \cdots + n_q(x_q - x_{0_q}) = 0,$$

ó

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_qx_q + d = 0,$$

con $d = -\sum_{i=1}^{q} n_i x_{0_i}$.

Ejercicio:
Conteste a las siguientes preguntas: (a) ¿ Cuántos vectores linealmente independientes definen un plano en $\mathbb{R}^q$? (b) ¿ Cuántos puntos son necesarios para definir un plano en $\mathbb{R}^q$? (c) Escriba la ecuación del plano en términos de las coordenadas de dichos puntos.

1.6.2 Ecuaciones escalares de una superficie

Definición* 1.24 (Superficie en $\mathbb{R}^q$)

Una superficie $S \subset \mathbb{R}^q$ es el lugar geométrico de todos los puntos $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^q$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0,$$

donde f es una función escalar de q variables. Si la función es continua diremos que S es una superficie continua[a]

[a] Aunque el lector con conocimientos previos sobre funciones de una variable no debe tener problemas en este punto, solicitamos su indulgencia ya que no hemos definido aún la continuidad de una función escalar. El lector impaciente puede «saltar» momentáneamente al siguiente tema.

La debilidad de la definición 1.24 radica en que cualquier superficie embebida en $\mathbb{R}^q$ puede caracterizarse mediante una ecuación escalar, pero no toda ecuación escalar define una superficie. Veámoslo en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.13 (La esfera)

En el próximo tema veremos la ecuación general que caracteriza una cuádrica en $\mathbb{R}^q$. De momento

nos centraremos en la esfera. La esfera de radio a centrada en el origen de coordenadas de un sistema de referencia de $\mathbb{R}^3$ es el lugar geométrico de todos los puntos (x, y, z) qua satisfacen la ligadura

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

De forma análoga, en $\mathbb{R}^q$ la ecuación de la esfera centrada en el origen viene dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_q^2 = a^2.$$

Sin embargo la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_q^2 = -a^2,$$

no admite soluciones en el campo de los números reales y, por tanto, define el conjunto vacío. Y la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_q^2 = 0,$$

admite como solución única $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$, es decir, el origen de coordenadas. En ningún caso aceptaríamos como superficie el vacío o un punto aislado.



Bajo ciertas condiciones la ecuación $f(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0$ define implícitamente cualquiera de las coordenadas en función de las $q - 1$ restantes; supongamos que es posible despejar la última coordenada x_q, de manera que

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0 \longrightarrow x_q = g(x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}).$$

Entonces podemos definir la superficie S como el lugar geométrico de todos los puntos $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^q$ que satisfacen la ecuación

$$x_q = g(x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}).$$

Ejemplo 1.14 (La semiesfera en q dimensiones)

Partiendo de la ecuación de la esfera centrada en el origen y radio a

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

y despejando la tercera coordenada como función de x e y, resulta

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \longrightarrow z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

El signo positivo (negativo) delante del signo de la raiz define la semiesfera de radio a superior (inferior). Cuando consideramos el espacio euclídeo general $\mathbb{R}^q$ también podemos despejar la última coordenada

$$x_q = \pm\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{q-1}^2},$$

de manera que los dos signos están asociados a cada una de las semiesferas con $x_q \geq 0$ y $x_q \leq 0$.



1.7 Otros sistemas de Coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Cualquier punto de $\mathbb{R}^q$ está definido por una sucesión ordenada de q números reales que llamamos sus coordenadas. Además de las coordenadas que hemos dado en llamar cartesianas,

existen otros sistemas de coordenadas que permiten caracterizar los puntos del espacio $\mathbb{R}^q$. Nos limitaremos aquí a dar los sistemas más habituales en el plano y en el espacio, que se muestran en la siguiente tabla

Espacio	**Sistema de coordenadas**		
$\mathbb{R}^2$	cartesianas (x, y)	polares (r, θ)	
$\mathbb{R}^3$	cartesianas (x, y, z)	cilíndricas (r, θ, z)	esféricas (r, θ, ϕ)

Estos sistemas de coordenadas pueden ser muy útiles para resolver ciertos problemas en el plano y en el espacio, en particular para el cálculo de integrales múltiples mediante un cambio de variables.

1.7.1 Coordenadas polares

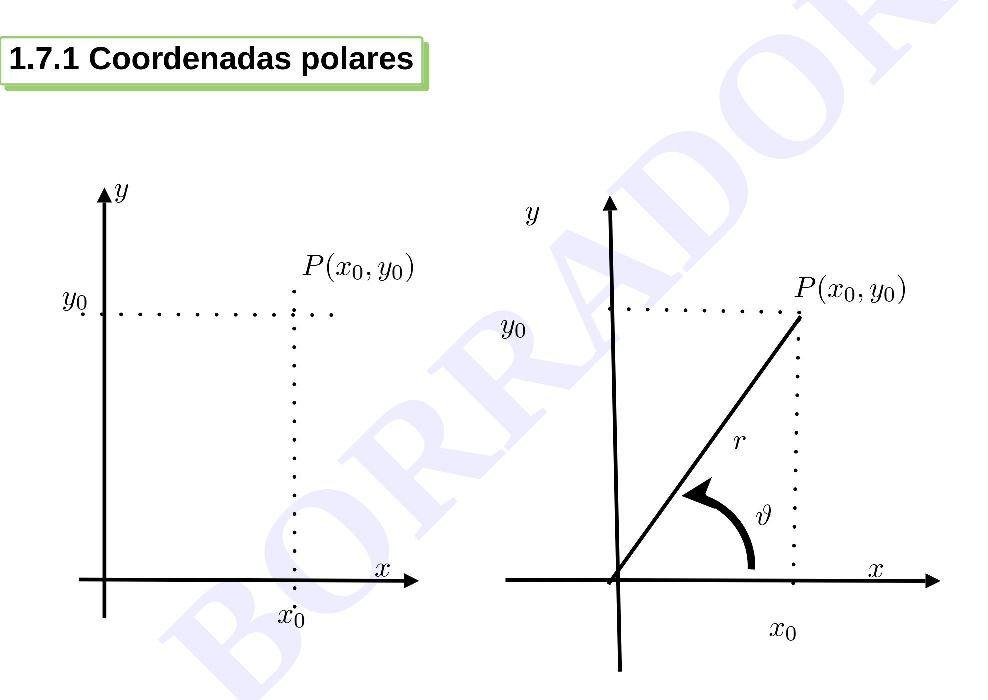


Figura 1.23: Coordenadas cartesianas y polares

Tal como se muestra en la figura 1.23 las coordenadas polares de un punto, que denotaremos por (r, θ), son la distancia del mismo al origen y el ángulo que forma su vector de posición con el semieje X positivo, medido en sentido contrario a las agujas del reloj. Para poder cubrir todos los puntos del plano es necesario que $r \geq 0$ y que $\theta \in [0, 2\pi)$. La siguiente tabla muestra los intervalos genéricos donde las coordenadas cartesianas y polares toman respectivamente sus valores

Coordenadas Cartesianas	Coordenadas polares
$x \in (-\infty, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\theta \in [0, 2\pi)$

Existe una correspondencia entre los dos tipos de coordenadas, es decir, podemos escribir las coordenadas cartesianas de un punto en función de sus coordenadas polares y viceversa. Llamaremos relación directa a la que proporciona los valores de x e y en función de los de r y θ. Esta relación se obtiene por trigonometría elemental como

$$x(r,\theta) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

El cálculo de la relación inversa, que da los valores de r y θ en función de los de x e y, es bastante más delicado. De la relación directa es evidente que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y un razonamiento rápido y poco cuidadoso nos lleva a que $\theta = \arctan(y/x)$. Sin embargo esta expresión tiene dos problemas: por un lado no está definida cuando $x = 0$, y por otro, la arcotangente es una función multivaluada de modo que a un valor de su argumento le corresponden diversos valores de la función . Eligiendo como rama de esta función la que asocia a su argumento un ángulo $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ encontramos que

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si} \quad x>0, y\geq 0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si} \quad x>0, y<0, \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & \text{si} \quad x<0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x=0, y>0, \\ \dfrac{3\pi}{2} & \text{si} \quad x=0, y<0, \\ - & \text{si} \quad x=y=0. \end{cases}$$

Este resultado muestra claramente que la relación entre las ooordenadas cartesianas y las correspondientes coordenadas polares de un punto no es una biyección: todos los puntos con $r = 0$ se aplican en $(0,0)$, independientemente del valor que tome θ. Dicho de otro modo, el ángulo θ no está bien definido en el origen de coordenadas.

Se denomina cuña polar[2] a la región del plano limitada por dos semirectas definidas por θ_1 y θ_2 y por dos arcos de circunferencia con radios r_1 y $r_2 (r_2 > r_1)$, tal como muestra la figura adjunta.

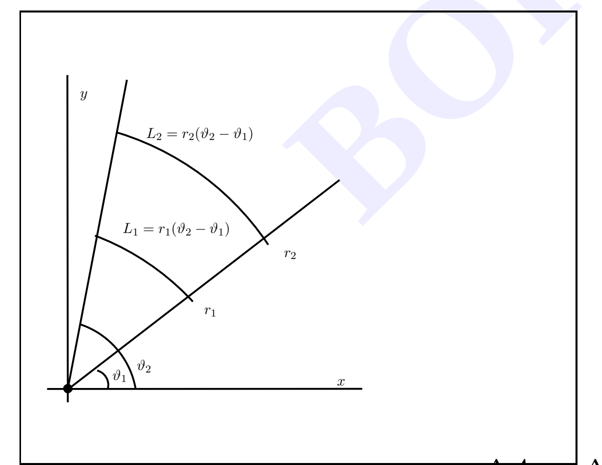


Figura 1.24: Elemento de área en polares

Definamos

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_1+r_2}{2}, \\ \Delta r &= r_2 - r_1, \\ \Delta\theta &= \theta_2 - \theta_1. \end{aligned}$$

Cuando Δr y $\Delta\theta$ se hacen **suficientemente pequeños** la cuña se asemeja a un recinto rectángular de lados Δr y $r\Delta\theta$. Entonces, el área de la cuña puede aproximarse como

$$\Delta A \simeq r\Delta r\Delta\theta.$$

Este resultado deviene exacto cuando los incrementos de coordenadas son infinitesimales, de manera que podemos escribir

$$\Delta A \to dA = r dr d\theta, \quad \Delta r \to dr, \quad \Delta\theta \to d\theta.$$

[2]También se encuentra en la literatura el nombre de segmento de corona circular

1.7.2 Coordenadas polares generalizadas

La ecuación de una circunferencia centrada en el origen y radio a se escribe de forma trivial en coordenadas polares como $r = a$ ya que

$$x^2 + y^2 = a^2 \to r^2 = a^2 \to r = a.$$

No sucede lo mismo con las elipses con centro en el origen y ejes paralelos a los de coordenadas. En efecto, si dada la ecuación de la elipse de semiejes a y b

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

efectuamos el cambio a coordenadas polares, obtenemos la expresión

$$\frac{r^2 \cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{b^2} = 1,$$

que no es más sencilla que la expresión original. Ahora bien, es posible definir coordenadas polares generalizadas que simplifiquen realmente la ecuación de la elipse. Sea

$$x(r,\theta) = ar\cos\theta, \quad y(r,\theta) = br\operatorname{sen}\theta,$$

donde a y b son factores positivos que denominamos «factores de dilatación» de los ejes coordenados. Efectuando el cambio de coordenadas tenemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \to \left(\frac{x(r,\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(r,\theta)}{b}\right)^2 = r^2 = 1,$$

es decir, en el nuevo sistema de coordenadas la ecuación de la elipse con semiejes a y b es simplemente $r = 1$.

Ejercicio:
Obtenga las relaciones inversas en este sistema de coordenadas polares. ¿ Representa r la distancia de un punto genérico al origen?

1.7.3 Coordenadas cilíndricas

La relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto del espacio y sus correspondientes coordenadas cilíndricas (r, θ, z) está definida por las siguientes ecuaciones

$$x(r,\theta,z) = r\cos\theta, \quad y(r,\theta,z) = r\operatorname{sen}\theta, \quad z(r,\theta,z) = z.$$

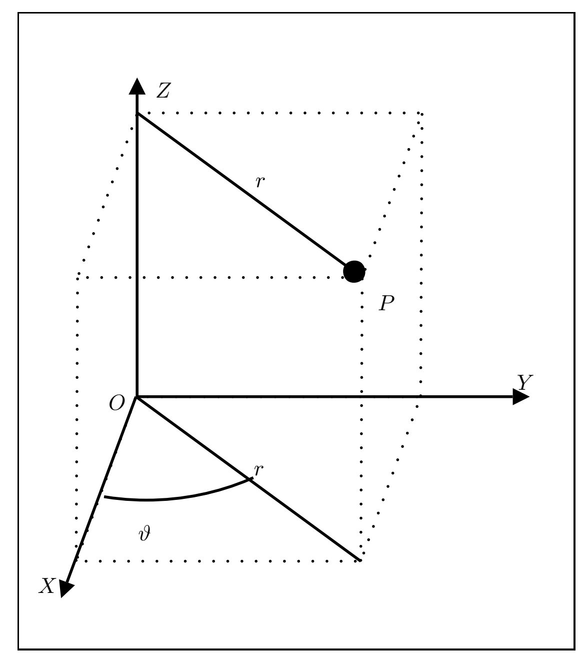


Figura 1.25: Coordenadas cilíndricas

Introducimos el significado geométrico de las nuevas coordenadas con ayuda de la figura adjunta. Tal como se muestra, un punto $P \in \mathbb{R}^3$ queda perfectamente determinado por la terna de números reales r, θ y z, donde r es la distancia del punto al eje Z, θ es el ángulo que forma el vector de posición de la proyección de P sobre el plano XY con el semieje X positivo, medido en sentido antihorario y z es la tercera coordenada cartesiana o cota.

El lector ya habrá apreciado la similitud entre las coordenadas cilíndricas en el espacio y las coordenadas polares en el plano. De hecho podríamos definirlas del siguiente modo: *dado un punto genérico* (x, y, z) *expresamos* x *e* y *en términos de las coordenadas polares de* (x, y) *y completamos la caracterización del punto mediante la cota* z.

Los intervalos genéricos en los que las coordenadas de uno y otro sistema de coordenadas pueden tomar valores son

Coordenadas Cartesianas	Coordenadas cilíndricas
$x \in (-\infty, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\theta \in [0, 2\pi)$
$z \in (-\infty, \infty)$	$z \in (-\infty, \infty)$

Con el fin de minimizar esfuerzos explotaremos la relación entre coordenadas polares y cilíndricas para la relación inversa entre éstas y las coordenadas cartesianas de un punto. Resulta sencillo deducir que

$$r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \theta(x, y, z) = \theta(x, y)\Big|_{pol},$$

donde el subíndice «*pol*» indica que se trata de la misma función que aparece en el sistema de coordenadas polares.

Las ecuaciones precedentes muestran que la relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas tampoco es una biyección, ya que todos los puntos de la forma $(r, \theta, z) = (0, \theta, z)$ se aplican en un sólo punto $(x, y, z) = (0, 0, z)$, cualquiera que sea θ. Esto implica que el ángulo θ no está bien definido para los puntos del eje Z.

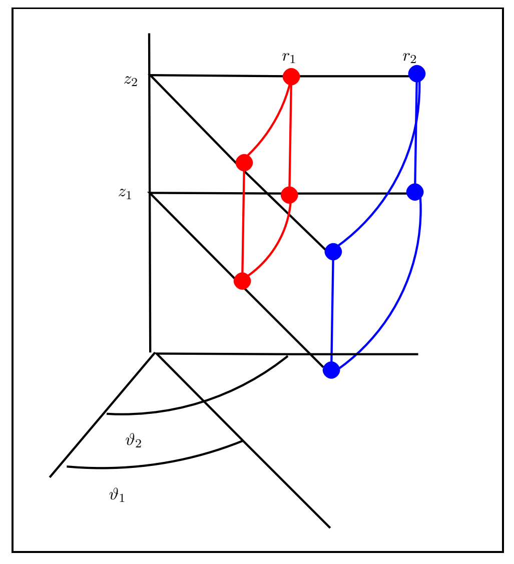


Figura 1.26: Elemento de volumen en cilindricas

La figura muestra una cuña cilíndrica caracterizada por dos semiplanos radiales con $\theta_2 > \theta_1$, dos cilindros con radios $r_2 > r_1$ y dos planos $z_2 > z_1$. Mediante un procedimiento similar al que seguimos en coordenadas polares introducimos las cantidades

$$\begin{aligned} r &= \frac{r_1 + r_2}{2}, \\ \Delta r &= r_2 - r_1, \\ \Delta\theta &= \theta_2 - \theta_1, \\ \Delta z &= z_2 - z_1. \end{aligned}$$

Cuando los incrementos de las variables son suficientemente pequeños la cuña se asemeja a un paralelepípedo de lados Δr, $r\Delta\theta$ y Δz, de manera que

$$\Delta V \simeq r \Delta r \Delta\theta \Delta z.$$

En el límite en que los incrementos de r y θ se hacen infinitesimales el resultado anterior es exacto y por lo tanto podemos escribir

$$\Delta V \to dV = r dr d\theta dz, \quad \Delta r \to dr, \quad \Delta\theta \to d\theta.$$

1.7.4 Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ se denotan habitualmente con los caracteres r, θ y ϕ. La coordenada r representa la distancia de P al origen de cordenadas, θ es el ángulo entre la proyección del vector de posición de P sobre el plano XY y el semieje X positivo, medido en sentido antihorario[3], y finalmente ϕ es el ángulo que forma dicho vector de posición con el semieje Z positivo, medido en el sentido de las agujas del reloj.

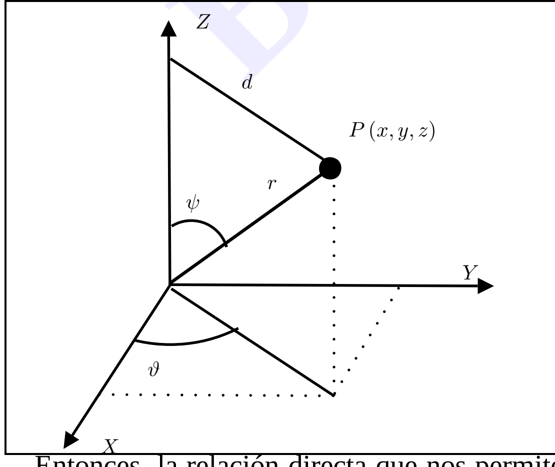


Figura 1.27: Coordenadas esféricas

La figura muestra gráficamente como se definen las tres coordenadas. Por razones prácticas introducimos la distancia d del punto al eje Z. Utilizando polares para representar los valores de x e y tenemos

$$x = d\cos\theta; \;\; y = d \operatorname{sen}\theta.$$

Por otro lado, utilizando trigonometría elemental resulta

$$z = r\cos\phi; \;\; d = r \operatorname{sen}\phi.$$

Entonces, la relación directa que nos permite escribir (x, y, z) en términos de (r, θ, ϕ) viene dada por

$$x(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y(r,\theta,\phi) = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z(r,\theta,\phi) = r\cos\phi.$$

[3] Y por tanto tiene el mismo significado que en coordenadas cilíndricas

Para poder «barrer» todos el espacio debemos permitir que las coordenadas de los dos conjuntos tomen valores en los intervalos que se muestran a continuación

Coordenadas Cartesianas	Coordenadas esféricas
$x \in (-\infty, \infty)$	$r \in [0, \infty)$
$y \in (-\infty, \infty)$	$\theta \in [0, 2\pi)$
$z \in (-\infty, \infty)$	$\phi \in (0, \pi)$

El razonamiento que permite deducir la forma de la transformación inversa es algo más complicado. Teniendo en cuenta que r es la distancia entre un punto genérico y el origen de coordenadas, que el significado de θ es el mismo que en coordenadas cilíndricas y utilizando que $z = r\cos\phi$, no resulta complicado llegar a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
r &= r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+x^2},\\
\theta &= \theta(x,y,z) = \theta(x,y)\Big|_{pol},\\
\phi &= \phi(x,y,z) = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0)\,,\\ - & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0)\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

La transformación inversa pone en evidencia que no estamos ante una biyección: los ángulos θ y ϕ no están bien definidos en los puntos del eje Z y en particular en el origen de coordenadas; en efecto,

$$\left.\begin{array}{lclcccl}
(r,\theta,z) &=& (r,\theta,0) &\longrightarrow& (x,y,z) &=& (0,0,r),\\
(r,\theta,z) &=& (r,\theta,\pi) &\longrightarrow& (x,y,z) &=& (0,0,-r),\\
(r,\theta,z) &=& (0,\theta,\phi) &\longrightarrow& (x,y,z) &=& (0,0,0),
\end{array}\right\} \forall\,\theta,\phi.$$

Ejercicio:
Se deja como ejercicio para el lector el cálculo del volumen de una cuña esférica

S 1.A Caracterización de regiones en el plano y el espacio

En los siguientes ejemplos mostramos como caracterizar algunas regiones del plano y del espacio utilizando coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas o esféricas. Consideraremos conjuntos conexos cuya frontera es siempre una curva continua y cerrada o una superficie continua y cerrada. En el espacio, los conjuntos de este tipo y que además son compactos se denominan regiones «sólidas». Nos interesan especialmente los llamados conjuntos simples o que pueden descomponerse fácilmente en subcojuntos que sí lo son. Un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ se demonina simple si existe un sistema de coordenadas (c_1, c_2) tal que

$$\Delta \triangleq \left\{(c_1,c_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus .\ c_1 \in \{\varphi_1, \psi_1\}\,,\ c_2 \in \{\varphi_2(c_1)\,, \psi_2(c_1)\}\right\},$$

donde φ_1 y ψ_1 son constantes, $\varphi_2(c_1)$ y $\psi_2(c_1)$ son funciones continuas de la primera variable, y $\{a, b\}$ representa tanto un intervalo abierto, como cerrado o semicerrado. De forma análoga diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es simple si existe un sistema de coordenadas (c_1, c_2, c_3) que permiten definirlo como

$$\Omega \triangleq \left\{ (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash . \quad \begin{array}{c} c_1 \in \{\varphi_1, \psi_1\} \\ c_2 \in \{\varphi_2(c_1), \psi_2(c_1)\} \\ c_3 \in \{\varphi_3(c_1, c_2), \psi_3(c_1, c_2)\} \end{array} \right\},$$

con φ_1 y ψ_1 constantes y $\varphi_2(3)$ y $\psi_2(3)$ funciones continuas.

En general cuando un conjunto simple se define estableciendo de forma explícita los intervalos en los que varían todas y cada unas de las coordenadas de sus puntos se dice que se ha caracterizado de forma simple[4]. Conviene comentar que la dificultad para obtener este tipo de caracterización es casi siempre muy notable; sólo en algunos casos (en la mayor parte de ellos se trata de regiones delimitadas por planos y superficies cuádricas) podremos obtener caracterizaciones simples en términos de funciones elementales.

1.A.a Caracterización de regiones en el plano

Entre éstas se encuentran los intervalos compactos, los discos abiertos y cerrados, y toda una colección de regiones de $\mathbb{R}^2$ delimitadas por curvas cuádricas. En este ejemplo nos centraremos en el disco, que por sencillez supondremos centrado en el origen de coordenadas.

Ejemplo 1.15 (Disco cerrado de radio a centrado en el origen)

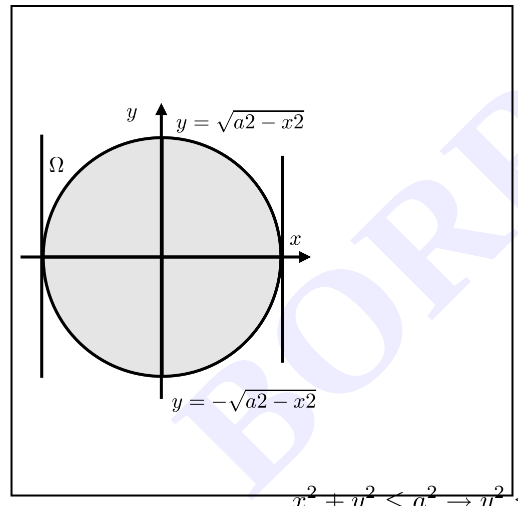


Figura 1.28: Disco en cartesianas

La definición en coordenadas cartesianas del disco cerrado de radio a y centrado en el origen es tan sencilla como

$$\Omega \triangleq \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash . \ x^2 + y^2 \leq a^2 \right\}.$$

Utilizando esta definición deduciremos los intervalos en los que pueden tomar valores las coordenadas x e y de los puntos pertenecientes al disco. De la figura resulta evidente que $x \in [-a, a]$; por otra parte, los límites de variación de la ordenada y se obtienen de la desigualdad que define el disco

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \to y^2 \leq a^2 - x^2 \to |y| \leq \sqrt{a^2 - x^2}$$

y por tanto $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$.

Como se comentó al comienzo de la sección, las definiciones de una región (de $\mathbb{R}^q$) que establecen de forma explícita los intervalos en los que varían las coordenadas de sus puntos se denominan caracterizaciones simples. Así la caracterización simple en coordenadas cartesianas de la región problema es

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash . \ x \in [-a, a], y \in \left[-\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{a^2 - x^2} \right] \right\},$$

donde el subíndice xy se utiliza para enfatizar que es una caracterización en coordenadas cartesianas.

[4] No hace falta decir que sólo un conjunto simple admite una definición de este tipo, pero los conjuntos simples se pueden definir mediante caracterizaciones diferentes, por ejemplo mediante una desigualdad de la forma $f(c_1, c_2, c_3) \leq 0$.

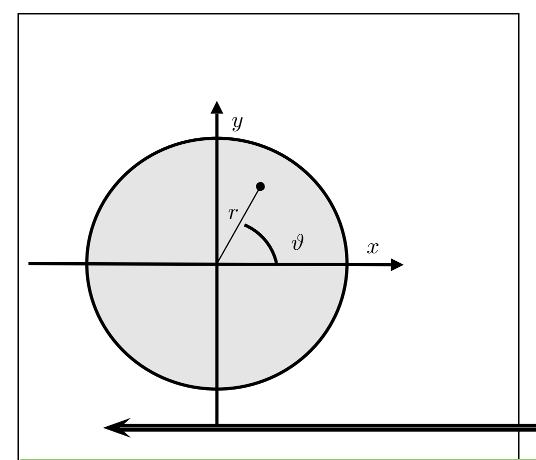


Figura 1.29: Disco en polares

Pasamos a describir la misma región utilizando coordenadas polares. En este sistema de coordenadas el disco cerrado de radio a y centrado en el origen se define por la relación $r \leq a$. En consecuencia el ángulo θ no está limitado por ninguna condición y puede tomar cualquier valor dentro del intervalo genérico $[0, 2\pi)$. Por tanto, la caracterización simple del disco en estas coordenadas polares es

$$\Omega_{r\theta} = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ r \in [0, a], \theta \in [0, 2\pi)\right\}$$

Ejemplo 1.16 (El «disco» elíptico de semiejes a y b)

Como tal entendemos la región del plano limitada por la elipse de semiejes a y b

$$\Omega \triangleq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}.$$

Procediendo como en el ejemplo precedente encontramos sin dificultad las caracterizaciones simples de esta región en coordenadas cartesianas y polares. En el primer caso tenemos

$$\Omega_{xy} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \in [-a, a], y \in \left[-b\sqrt{1-(x/a)^2}, b\sqrt{1-(x/b)^2}\right]\right\},$$

y utilizando coordenadas polares generalizadas

$$\Omega_{r\theta} = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi)\right\}.$$

Ejemplo 1.17 (El cuadrado de lado a)

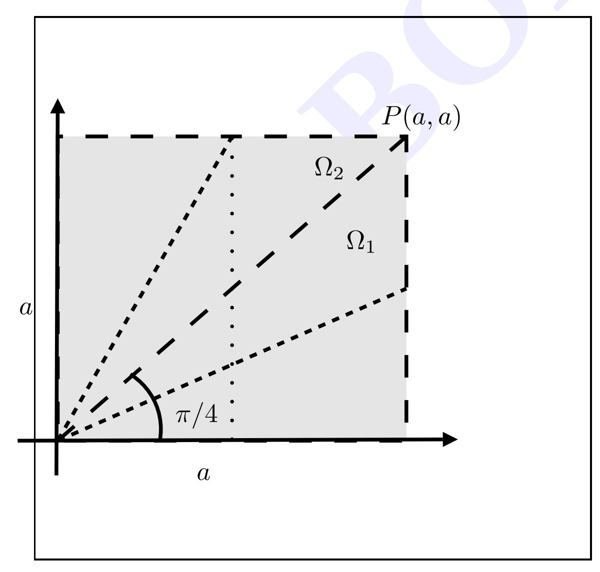


Figura 1.30: Cuadrado de lado a

Por sencillez utilizaremos un cuadrado cuyo vértice inferior izquierdo coincida con el origen de coordenadas y cuyos lados sean paralelos a los ejes coordenados. El lector coincidirá con nosotros en que la caracterización de esta región en coordenadas cartesianas resulta particularmente fácil

$$\Omega_{xy} \triangleq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \begin{array}{ccc} x & \in & [0, a] \\ y & \in & [0, a] \end{array}\right\}$$

Sin embargo, la caracterización simple en coordenadas polares es muy complicada; de hecho, resulta del todo imposible a menos que dividamos Ω en dos subconjuntos Ω_1, Ω_2 tal como se muestra en la figura. Admitiendo que la frontera entre Ω_1 y Ω_2 pertence al primero parece obvio que en el subconjunto Ω_1 la cordenada angular varía como $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. La figura también resulta útil para deducir el valor máximo que puede tomar la coordenada r. Éste depende de θ, es decir $r \in [0, R_1(\theta)]$, y para deducir la cota $R_1(\theta)$ nos fijamos en que

$$R(\theta) \cos\theta = a \rightarrow R(\theta) = \frac{a}{cos\theta}.$$

Podemos verificar esta resultado dando algunos valores a θ; así cuando $\theta = 0 \to R_1(\theta) = a$ y para $\theta = \dfrac{\pi}{4} \to R_1(\theta) = \sqrt{2}a$, lo que sugiere que dicha relación es correcta. Por lo tanto la caracterización simple de Ω_1 será

$$\Omega_{1_{r\theta}} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ r \in \left[0, \frac{a}{cos\theta}\right], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

Procediendo de forma similar para Ω_2 tenemos

$$\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \ ; \ r \in (0, R_2(\theta)]\,,$$

donde hemos excluido el origen ($r = 0$), que por hipótesis pertenece a Ω_1. Puesto que $R_2(\theta)sen\theta = a$ deducimos que $R_2(\theta) = \dfrac{a}{sen\theta}$. Dando valores a θ para comprobar su validez tenemos: cuando $\theta = \dfrac{\pi}{4} \to R_2(\theta) = \sqrt{2}a$ y si $\theta = \dfrac{\pi}{2} \to R_2(\theta) = a$, por lo que aceptamos dicha relación como correcta. En definitiva

$$\Omega_{2_{r\theta}} \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash. \ r \in \left(0, \frac{a}{sen\theta}\right], \theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

1.A.b Caracterización de regiones «sólidas» en el espacio

Ejemplo 1.18 (Parametrización de una bola cerrada)

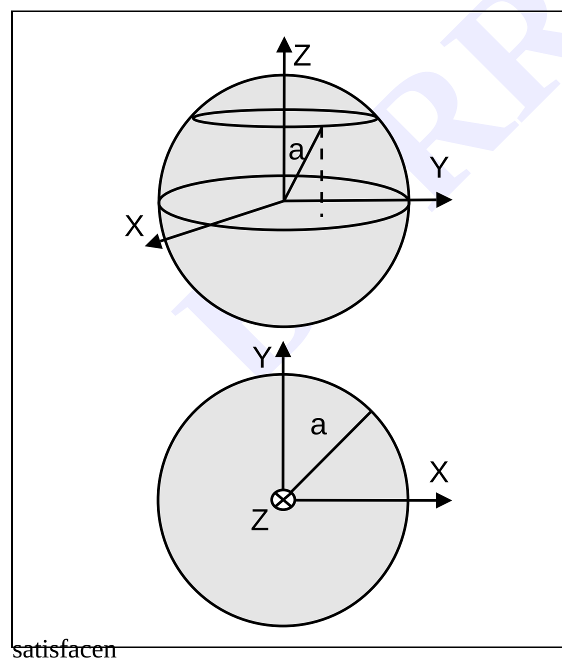


Figura 1.31: Bola centrada en el origen

Un ejemplo de región sólida en el espacio es la bola; por fijar ideas consideraremos el caso de una bola cerrada de radio a y centrada en el origen de coordenadas. De manera formal podemos definirla como el lugar geométrico de los puntos (x,y,z) que satisfacen la ecuación $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, es decir

$$\Omega \triangleq \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \ x^2+y^2+z^2 \leq a^2\right\}$$

Comenzaremos buscando una caracterización simple en coordenadas cartesianas; para ello estudiamos la proyección de los puntos de la bola sobre el plano XY. Esta proyección se obtiene imponiendo que $z = 0$. Entonces la restricción que define la bola queda reducida a $x^2+y^2 \leq a^2$, desigualdad que caracteriza el disco cerrado de radio a y centrado en el origen (ver 1.28). Por tanto las coordenadas x e y de los puntos de la bola satisfacen

$$x \in [-a,a] \ y \in \left[-\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2-x^2}\right].$$

Los límites de la coordenada z podemos deducirlos de la desigualdad que define la región

$$x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \to z^2 \leq a^2-x^2-y^2 \to |z| \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

ó

$$-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2-x^2-y^2},$$

con lo que la caracterización simple en cartesianas viene dada por

$$\Omega_{xyz} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \begin{array}{ccc} x & \in & [-a, a] \\ y & \in & \left[-\sqrt{a^2-x^2}, \sqrt{a^2-x^2}\right] \\ z & \in & \left[-\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \sqrt{a^2-x^2-y^2}\right] \end{array} \right\}$$

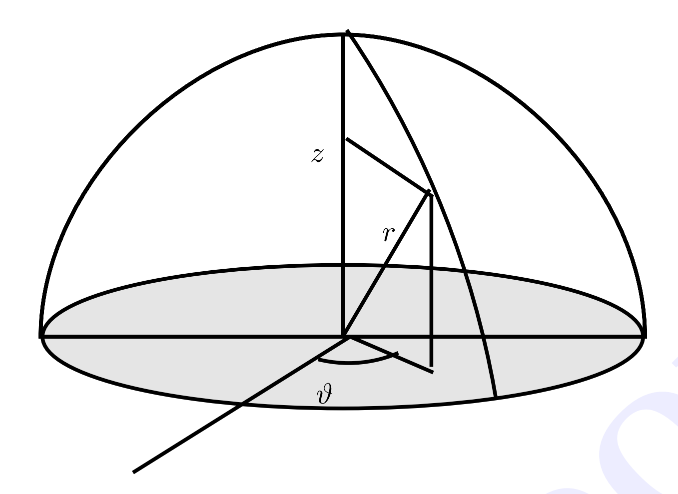


Figura 1.32: Bola en coordenadas cilíndricas

La caracterización simple en coordenadas cilindricas resulta más sencilla si cabe; en efecto, como la proyección sobre el plano XY es un disco, los límites de variación de las coordenadas r y θ pueden escribirse como $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r \in [0, a]$. Una vez fijados estos límites, los de z los deduciremos de la ecuación de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Ahora bien, en cilíndricas $r^2 = x^2 + y^2$, luego:

$$r^2 + z^2 \leq a^2 \to |z| \leq \sqrt{a^2 - r^2} \to z \in \left[-\sqrt{a^2-r^2}, \sqrt{a^2-r^2}\right],$$

y en consecuencia

$$\Omega_{r\theta z} = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \begin{array}{ccc} r & \in & [0, a] \\ \theta & \in & [0, 2\pi) \\ z & \in & \left[-\sqrt{a^2-r^2}, \sqrt{a^2-r^2}\right] \end{array} \right\}$$

Por último, en coordenadas esféricas la caracterización simple es inmediata: la desigualdad que define en este sistema de coordenadas una bola cerrada es $r \leq a$ con θ y ϕ libres. Entonces

$$\Omega_{r\theta\phi} = \left\{ (r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \begin{array}{ccc} r & \in & [0, a] \\ \theta & \in & [0, 2\pi) \\ \phi & \in & [0, \pi] \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1.19 (Parametrización de una bola «elíptica»)

Sea el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que satisfacen

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

con $a, b, c > 0$. Se trata de la región compacta del espacio delimitada por una elipse de semiejes a, b y c.

Dejamos como ejercicio que el lector demuestre que la caracterización simple en cordenadas cartesianas es

$$\Omega_{xyz} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \begin{array}{ccc} x & \in & [-a, a] \\ y & \in & \left[-b\sqrt{1-(x/a)^2}, b\sqrt{1-(x/a)^2}\right] \\ z & \in & \left[-c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}, c\sqrt{1-(x/a)^2-(y/b)^2}\right] \end{array} \right\}$$

La caracterización simple en coordenadas esféricas se simplifica de manera apreciable introduciendo un sistema de coordenas esféricas modificado. Consideremos la siguiente transformación de coordenadas

$$x(r,\theta,\phi) = ar\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad y(r,\theta,\phi) = br\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z(r,\theta,\phi) = cr\cos\phi,$$

con los tres factores de escala iguales a los semiejes de la elipse. Entonces, substituyendo en la ecuación que define la región

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \rightarrow \left(\frac{x\,(r,\theta,\phi)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y\,(r,\theta,\phi)}{b}\right)^2 + \left(\frac{z\,(r,\theta,\phi)}{c}\right)^2 = r^2 \leq 1,$$

obtenemos que la definición de ésta en el nuevo sistema de coordenadas es $r \leq 1$. Obsérvese que esta relación deja libres los dos ángulos con lo que

$$\Omega_{r\theta\phi} = \left\{ (r,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash . \ \begin{array}{ccc} r & \in & [0,1] \\ \theta & \in & [0,2\pi) \\ \phi & \in & [0,\pi] \end{array} \right\}$$

Problemas

Problema 1.1 Sean $P \triangleq (x_1, x_2)$ y $Q \triangleq (y_1, y_2)$. Demuestre que la función $d_2\,(P,Q) = \mathbf{Sup}\,\{|x_1 - y_1|\,, |x_2 - y_2|\}$ satisface todas las propiedades de una distancia. Determine la forma de la circunferencia de radio a centrada en $(0,0)$ asociada a esta distancia.

Problema 1.2 Pruebe que $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash . \ x > 0\right\}$ es un conjunto abierto. Obtenga la frontera y la adherencia de A.

Problema 1.3 Sea $\vec{u}$ un vector unitario. Demuestre que cualquier vector $\vec{a}$ puede descomponerse de la siguiente manera en una parte paralela y otra perpendicular a $\vec{u}$.

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\,\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{a}) \times \vec{u}.$$

Problema 1.4 Sean $l : y = mx + b$, $l_1 : y = m_1 x + b_1$ y $l_2 : y = m_2 x + b_2$ rectas en el plano XY. Se pide que:

1. encuentre una parametrización vectorial de la recta l.
2. demuestre que las dos rectas l_1 y $l_2$son ortogonales si y solo si $m_1 m_2 = -1$.

Problema 1.5 Considere la recta l que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y cuyo vector director es $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Obtenga por métodos vectoriales la distancia de la recta a un punto (x,y,z) genérico.

Problema 1.6 Considere la recta l que pasa por el punto $P_0 \triangleq (x_0, y_0, z_0)$ y cuyo vector director es $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$. Sea $P_1 \triangleq (x_1, y_1, z_1)$ un punto externo a la recta. Se pide que:

1. exprese la distancia de los puntos Q de la recta l al punto P_1 como función de una variable real.
2. minimice el cuadrado de dicha función y verifique que dicho mínimo coincide con la expresión obtenida en el problema anterior.

Problema 1.7 Dado el plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto (x_1, y_1, z_1) genérico del espacio, encuentre una expresión vectorial para la distancia de dicho punto al plano.

Problema 1.8 Demuestre que la distancia entre dos rectas no paralelas $l_1 : \vec{r}\,(r_1)\,t = \vec{a}_1 + t\vec{v}_1$ y $l_2 : \vec{r}\,(r_2)\,t = \vec{a}_2 + t\vec{v}_2$ está dada por

$$d = \frac{\left|(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\right|}{\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|}$$



Problema 1.9 Sea Ω la región compacta limitada por el elipsoide de revolución $3x + 3y + x = 4$:

- Indique cuál es su eje de simetría.
- Obtenga caracterizaciones simples en coordenadas cilíndricas y esféricas.
- Utilice un sistema de coordenadas definido por $x = acos\theta sen\phi$, $y = bsen\theta sen\phi$, $z = ccos\phi$, y elija los valores de a, b y c de manera que las expresiones sean lo más sencillas posible.



Problema 1.10 Caracterice en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas la región cerrada Ω limitada por una esfera de radio R centrada en el punto (x_0, y_0, z_0).

Problema 1.11 Dado el comjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ demuestre que:

1. Los conjuntos $\mathring{\Omega}$, $Ex(\Omega)$ y $\partial\Omega$ son disjuntos.
2. $\mathbb{R}^q = \mathring{\Omega} \cup Ex(\Omega) \cup \partial\Omega$.



Problema 1.12 Dado el comjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ demuestre que:

1. Los conjuntos $\mathring{\Omega}$ y $Ex(\Omega)$ son abiertos.
2. Un conjunto Ω es cerrado si $\mathbb{R}^q - \Omega$ es abierto.
3. Los conjuntos $\partial\Omega$ y $\overline{\Omega}$ son cerrados.

Tema 2

Funciones reales escalares

A lo largo de este tema sentaremos las bases del cálculo diferencial de funciones reales de varias variables reales. Las denominaremos funciones escalares de forma genérica. Aprenderemos a caracterizar una función escalar mediante la elaboración de gráficas e introduciremos los conceptos de límite y continuidad. El alumno no deberá extrañarse de que estos conceptos planteen dificultades importantes. Finalizaremos el capítulo definiendo los conceptos de derivada parcial y derivada direccional, insistiendo en el significado geométrico de las mismas.

2.1 Definiciones

Definición 2.1 (Función escalar)

Una aplicación

$$f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \setminus . \ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in D \Rightarrow f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \in \mathbb{R},$$

se denomina función real escalar de varias variables reales. El conjunto $D \subset \mathbb{R}^q$ *se llama* ***dominio de definición*** *de la función; el conjunto* $f(D) = \left\{ f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \ ; \setminus . \ \vec{\boldsymbol{x}} \in D \right\}$ *recibe el nombre de* ***imagen*** *de la función.*

Utilizaremos la notación $z = f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ *o* $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ *para hacer explícito el valor que toma la función* f *en un punto de su dominio. Las* q *variables* $x_1, x_2, \cdots, x_q$ *se denominan variables independientes, mientras que* z *es la variable dependiente.*

Ejemplo 2.1 (Ejemplo de función escalar)

Este ejemplo proporciona un caso sencillo de función escalar real de dos variables reales

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}},$$

que está bien definida en el disco abierto $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \setminus . \ x^2 + y^2 < 1 \right\}$.

En general cuando una función f se define mediante una fórmula y no se especifica su dominio de definición debe entenderse que éste es el conjunto de todos los puntos $\vec{\boldsymbol{x}}$ para los que $f(\vec{\boldsymbol{x}})$ es un número real bien definido.

Asimismo, como norma general, debemos entender que cuando una función posee cierta propiedad «cerca» de un punto $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ esto quiere decir que existe una bola centrada en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ de manera que en todos los puntos de la misma se cumple la mencionada propiedad.

Ejemplo 2.2 (Dominio e imagen de una función)

Determinemos el dominio y la imagen de la función escalar

$$f(x,y) = 1/\sqrt{4x-y}.$$

Para que $f(x,y)$ sea un número real debe cumplirse que $4x - y > 0$; si el radicando fuese negativo la raiz tomaría valores complejos, y si fuese nulo la fracción divergería. Por tanto $4x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 4x^2 \Rightarrow |y| < 2|x| \Rightarrow -2|x| < y < 2|x|$. Concluimos que el dominio de definición de f es la región sombreada y delimitada por las rectas $y = \pm 2x$.

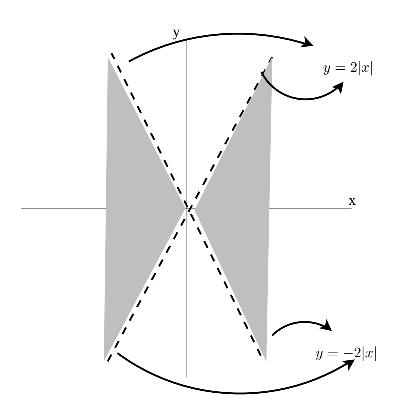


Figura 2.1: Dominio de la función propuesta

Para establecer la imagen de la función conviene considerar los siguientes límites

$$\begin{array}{lllll} \text{Cuando} & 4x^2 - y^2 \to 0^+ \Rightarrow & \sqrt{4x^2-y^2} \to 0^+ \Rightarrow & f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}} \to \infty \\ \text{Cuando} & 4x^2 - y^2 \to \infty \Rightarrow & \sqrt{4x^2-y^2} \to \infty \Rightarrow & f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}} \to 0^+ \end{array}.$$

Este resultado muestra con claridad que la imagen $f(D)$ contiene todos los números reales positivos, y por lo tanto, según la definición que presentamos a continuación f no es una función acotada.



Definición 2.2 (Función acotada)

Se dice que una función f es acotada si $\exists\, K > 0 \ \backslash.\ f(\overrightarrow{x}) \leq K\ \forall \overrightarrow{x} \in D$.

Al igual que ocurre con las funciones escalares de una variable real, podemos combinar dos (o más) funciones para generar una nueva función. Las operaciones con funciones más importantes son

Definición 2.3 (Operaciones elementales con funciones)

Dadas $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $h : f(D) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definimos las siguientes funciones con dominio* D*:*

1. *suma,* $(f+g)(\overrightarrow{x}) \triangleq f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})$
2. *producto,* $(fg)(\overrightarrow{x}) \triangleq f(\overrightarrow{x})\, g(\overrightarrow{x})$
3. *producto por un escalar,* $(\lambda f)(\overrightarrow{x}) \triangleq \lambda f(\overrightarrow{x})$
4. *cociente,* $(f/g)(\overrightarrow{x}) \triangleq f(\overrightarrow{x})/g(\overrightarrow{x})$ *si* $g(\overrightarrow{x}) \neq 0$
5. *composición de* h *y* g, $(h \circ f)(\overrightarrow{x}) \triangleq h(f(\overrightarrow{x}))$

2.2 Representación gráfica de funciones escalares

2.2.1 Gráfica de una función

Comenzaremos por recordar que la gráfica de una función escalar de una variable real $y = f(x)$, definida en el intervalo $[a, b]$, es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $y = f(x)$ y x pertence a $[a, b]$. De manera más formal escribiremos

$$\text{Si} \;\; f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; \text{entonces} \;\; G_f \triangleq \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \;\; \backslash . \;\; x \in [a, b] \right\}$$

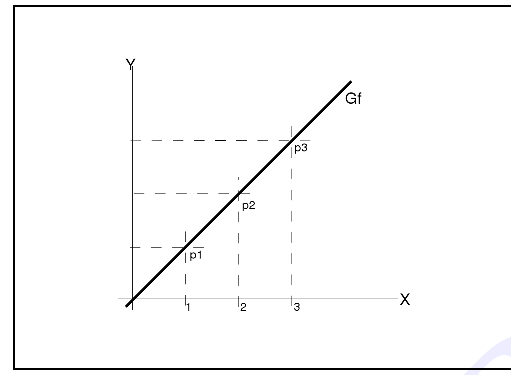


Figura 2.2: Gráfica de $y = x$

El aspecto de la gráfica de una función de una sola variable real es el que se muestra en la figura adjunta. Elegimos unos cuantos valores reales $x_i \in [a, b]$, calculamos su imagen $f(x_i)$ y formamos los puntos $P_i \equiv (x_i, f(x_i))$. Al representar el conjunto de puntos P_i en el plano surge (de forma aproximada) el aspecto de la gráfica de la función.

Por supuesto, existen elementos adicionales que proporcionan una ayuda bastante valiosa en la elaboración de la gráfica de una función : el estudio de discontinuidades, el cálculo de los puntos donde la función alcanza sus extremos locales y el estudio del comportamiento asintótico de la misma cuando $x \to \pm\infty$, etc.

De forma análoga la gráfica de una función escalar de dos variables reales $z = f(x, y)$, con dominio D, es el conjunto de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $z = f(x, y)$ y $(x, y) \in D$, es decir:

$$\text{si} \;\; f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \, ; \; (x, y) \in D \longrightarrow f(x, y) \, ,$$

entonces su gráfica es el conjunto

$$G_f \triangleq \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \, \backslash . \; (x, y) \in D \right\} .$$

Ejemplo 2.3

Estudiemos la gráfica de la función escalar

$$f : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \, \backslash . \, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \longrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Una simple transformación nos permite escribir que

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow z = 1 - x - y \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

de manera que se trata del hemisferio superior de la esfera de radio unidad centrada en el origen. Sabemos que su representación gráfica es la siguiente superficie

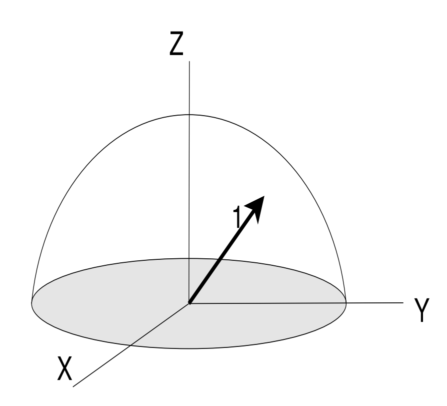
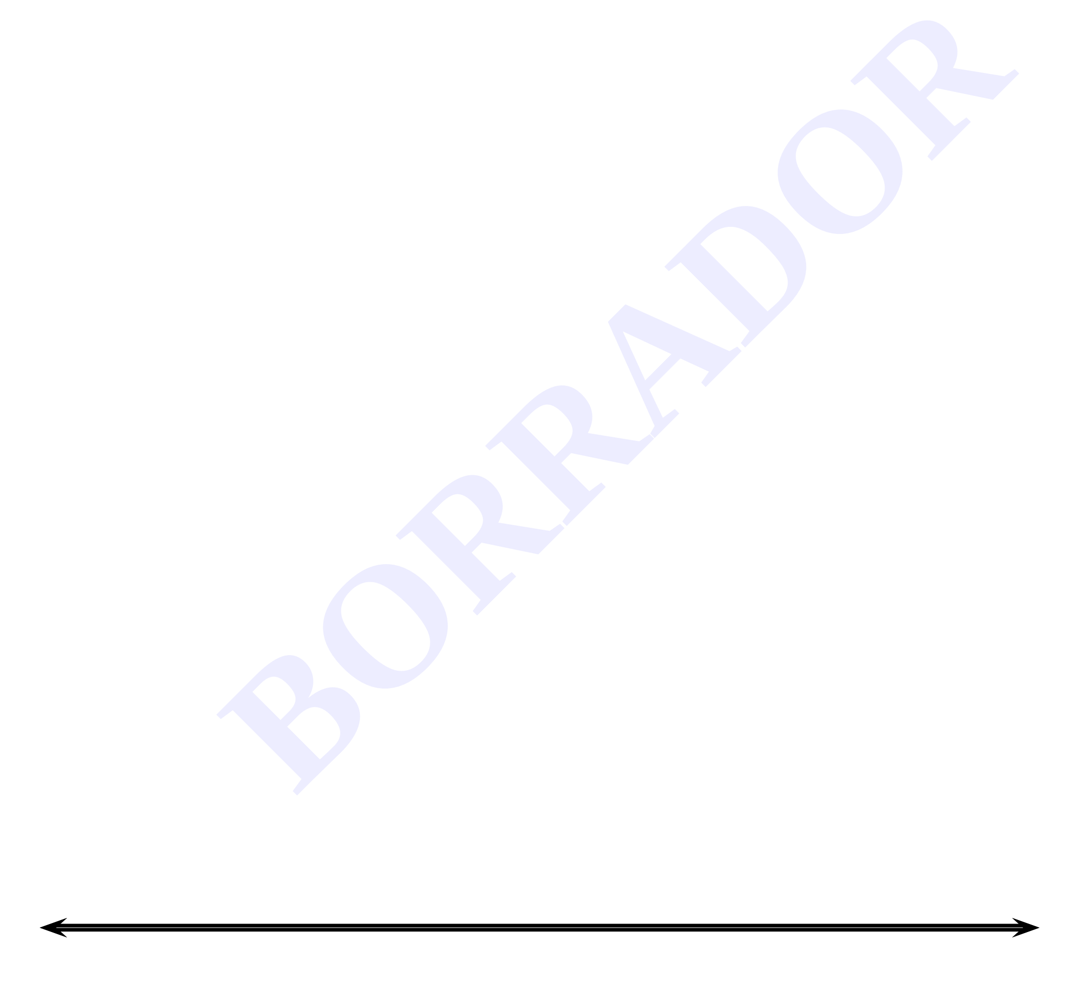
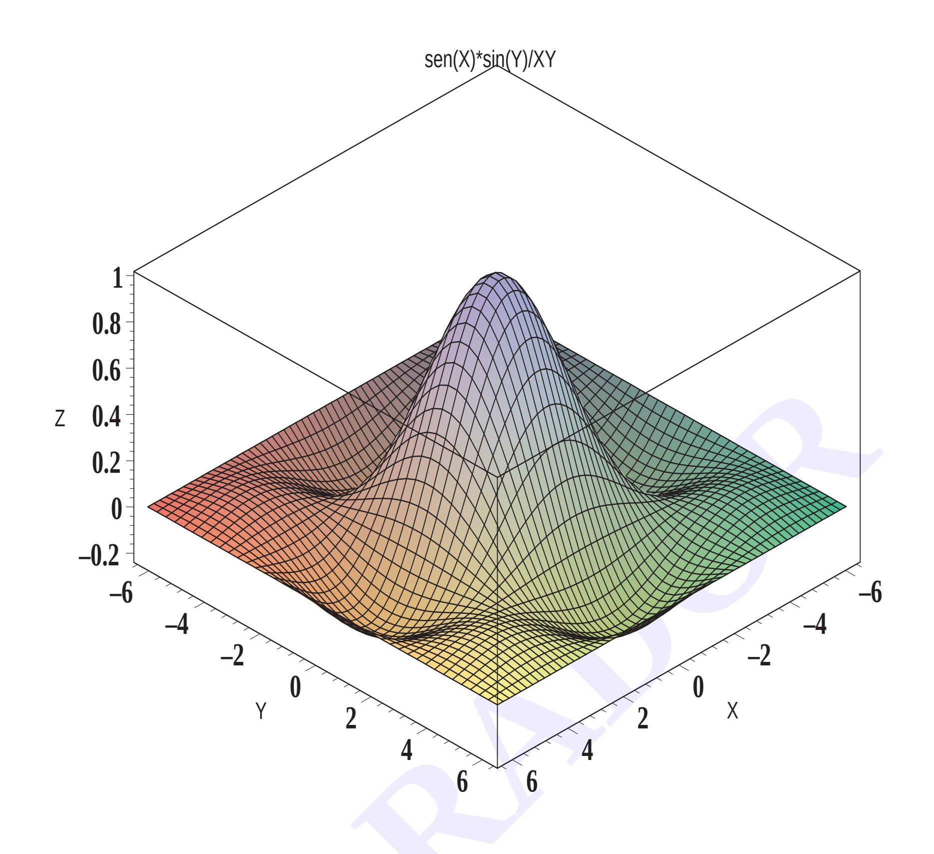


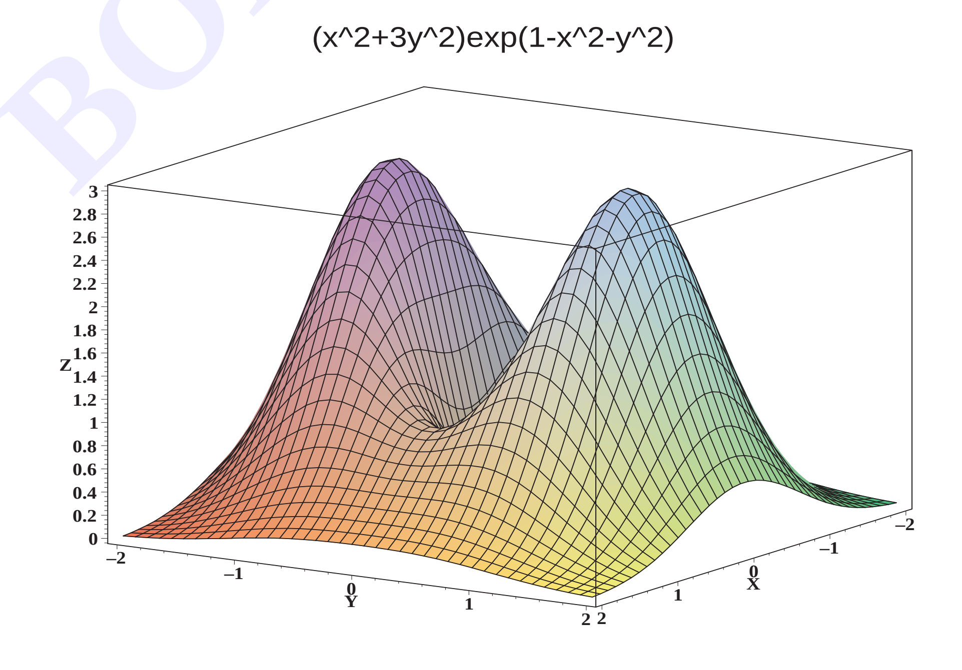
Figura 2.3: Semiesfera de radio unidad



La elaboración de la gráfica de una función escalar de dos variables reales resulta en general muy laboriosa y compleja, cuando no imposible; afortunadamente existen diversos programas informáticos que facilitan o realizan esa tarea. Veamos algunos ejemplos de funciones escalares de dos variables graficadas con el programa de cálculo simbólico **MAPLE**.



Gráfica de la función $z = sen(x)sen(y)/xy$



Gráfica de la función $z = (x^2 + 3y^2)exp(1 - x^2 - y^2)$

En general, la gráfica de una función escalar dependiente de un número genérico q de variables reales independientes se define como

Definición 2.4 (Gráfica de una función en $\mathbb{R}^q$)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar de* q *variables reales; llamamos entonces gráfica de la función* f *al conjunto*

$$G_f \triangleq \left\{ (x_1, \cdots, x_q, f(x_1, x_2, \cdots, x_q)) \in \mathbb{R}^{q+1} \ \backslash . \ \ (x_1, x_2, \cdots, x_q) \in D \right\},$$

o de forma más «compacta»

$$G_f \triangleq \left\{ \left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)\right) \in \mathbb{R}^{q+1} \ \ \backslash . \ \ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D \right\}.$$

El lector atento ya habrá asimilado que la gráfica de una función de dos variables es un conjunto de puntos pertencientes a $\mathbb{R}^3$. Por ello, la representación de la gráfica en el plano (en la práctica el papel o la pantalla del monitor) requiere la proyección desde tres a dos dimensiones. En ese proceso siempre se pierde, o se desvirtua, parte de la información real contenida en la gráfica.

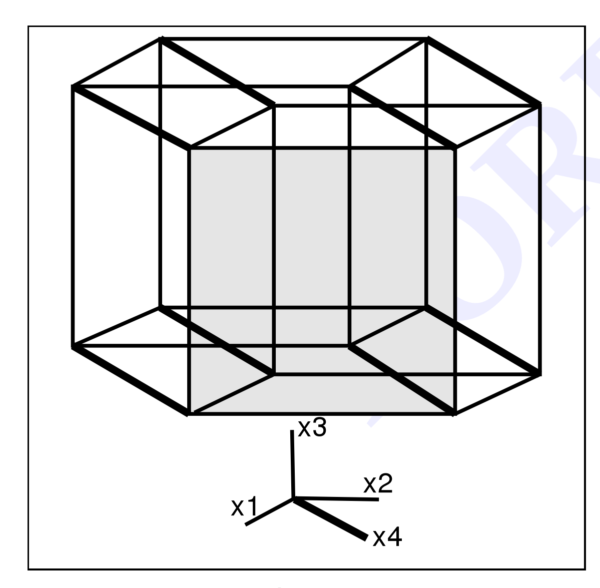


Figura 2.4: Proyección bidimensional de un hipercubo de cuatro dimensiones

En el caso de una función de tres variables, la gráfica es un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^4$; no podemos realizar una construcción real en el espacio y mucho menos en el plano. Cuando representamos dicha gráfica proyectando desde un espacio de cuatro dimensiones al plano la pérdida de información es mucho mayor. Como un ejemplo mostramos la proyección en el plano de un hipercubo de cuatro dimensiones.

2.2.2 Conjuntos de nivel

Los ejemplos precedentes muestran con claridad que la representación de la gráfica de una función , incluso de una sencilla, puede ser difícil. Y aunque hoy en día disponemos de herramientas informáticas que facilitan esta labor, resulta conveniente utilizar otras técnicas de representación gráfica, que facilitan la elaboración de la gráfica o que proporcionan información complementaria. La más importante de estas técnicas es la representación de los conjuntos de nivel de la función . La idea proviene de los topógrafos que elaboran mapas de contornos uniendo los puntos del terreno con la misma elevación (sobre el nivel del mar) para formar curvas de

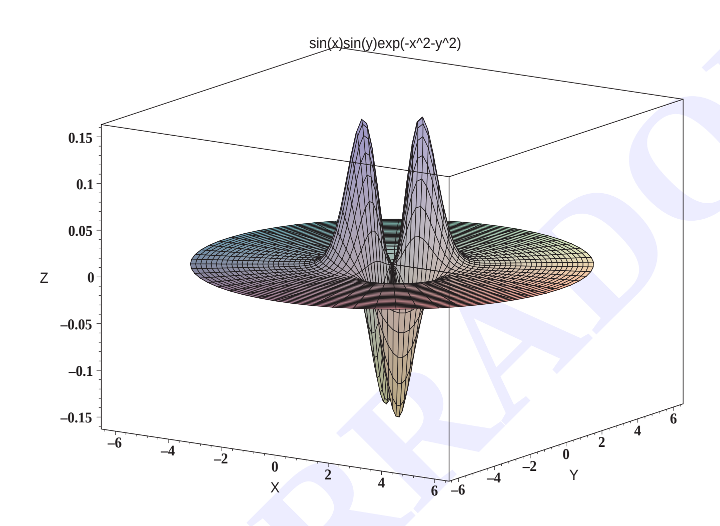
contorno o curvas de nivel. En el caso de funciones de dos variables tenemos

Definición 2.5 (Curvas de nivel)

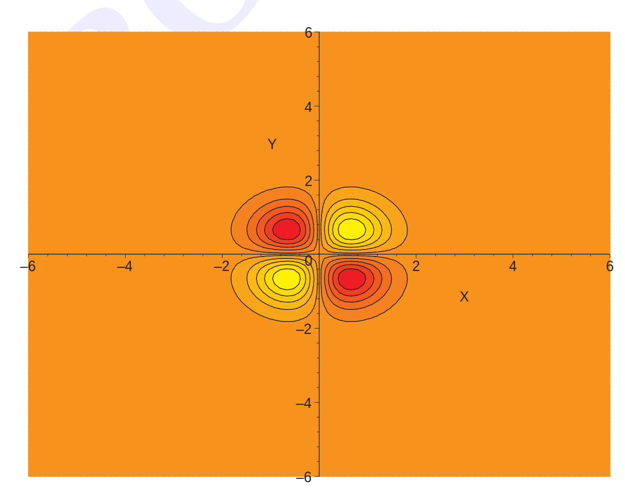
Sea $z = f(x, y)$ *una función de dos variables definida en el dominio de definición* D*; se define la curva de nivel de valor* k *como el lugar geométrico*[a]

$$C_k \triangleq \{(x, y) \in D \quad \backslash . \quad f(x, y) = k\} .$$

[a]Para que $C_k \neq \varnothing$ el valor k debe formar parte de la imagen de la función .



Gráfica de la función $z = \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)\exp(-x^2 - y^2)$.



Curvas de nivel de la función.

Estas figuras muestran la gráfica de la función $z = \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)\exp(-x^2 - y^2)$ y sus curvas de nivel. La representación de las curvas de nivel se ha hecho en un esquema de «falso color»: cada punto se representa con un color característico del valor que f toma en el mismo. En particular los puntos donde f toma un valor cercano a cero se han representado mediante un color naranja; los valores grandes se representan con colores amarillos; y finalmente los valores

negativos y muy pequeños con colores rojos[1].

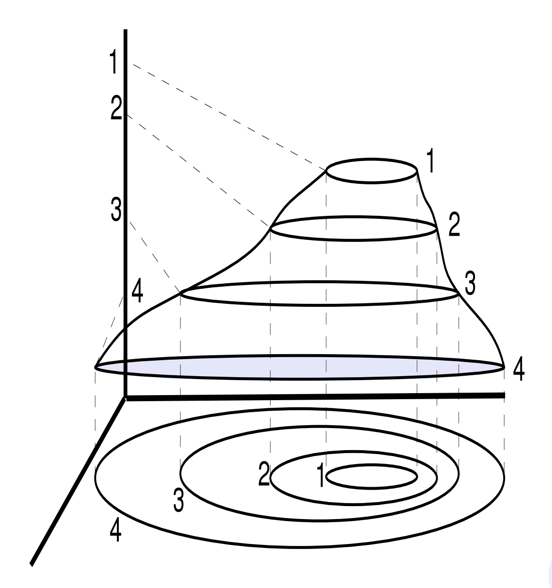


Figura 2.5: Curvas de nivel

Las curvas de nivel son los lugares geométricos, en el interior del dominio de definición de la función , donde ésta toma un valor constante. Podemos obtenerlas uniendo todos los puntos de elevación constante de la gráfica y proyectando las curvas resultantes sobre el plano XY. No resulta muy difícil convencerse de que cuanto más próximas se hallan entre sí las curvas de nivel, mayor es la rapidez con que varía el valor de la función . Por último abusaré un poco de la confianza del lector para afirmar que en cada punto de su dominio de definición , la variación de f es mayor en la dirección ortogonal a la curva de nivel que pasa por dicho punto. Dejando la demostración de este hecho para el siguiente tema, veamos un par ejemplos que nos permitan afianzar estas ideas

Ejemplo 2.4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \Rightarrow z = x^2 + y^2$, una función de dos variables definida en todo el plano. Las curvas de nivel se definen simplemente a partir de las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = k \quad \backslash. \quad k \geq 0,$$

donde la constante k no puede tomar valores negativos dado que el miembro de la izquierda siempre es positivo o cero. Se trata de circunferencias de radio $\sqrt{k}$ centradas en el origen; la siguiente figura muestra los casos correspondientes a $k = 1, 2, 3$ y 4.

[1]Los alumnos con copias en blanco y negro pueden ver la figura original en la página WEB de la asignatura.

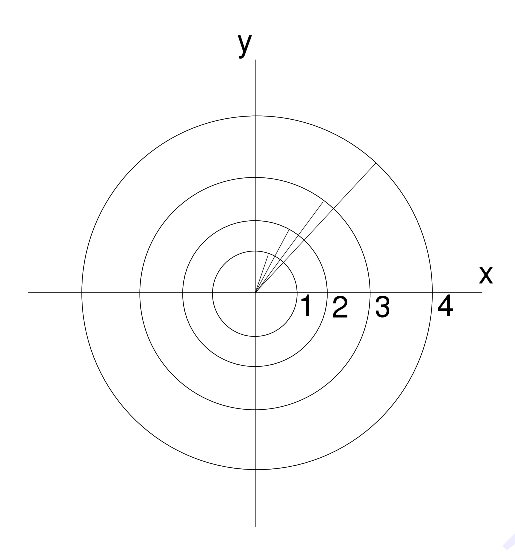


Figura 2.6: Ejemplo 1 de curvas de nivel

Ejemplo 2.5

Dada la función

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ \backslash.\quad (x,y) \Rightarrow z = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & x \geq 0, \\ |y| & x < 0, \end{cases}$$

las curvas de nivel se definen como

$$\begin{array}{lll} x \geq 0, & \sqrt{x^2+y^2} = k \geq 0 & \Rightarrow \text{son semicircunferencias de radio k}, \\ x < 0, & |y| = k \ \text{ ó } \ y = \pm k & \Rightarrow \text{son semirectas}, \end{array}$$

de forma que presentan el siguiente aspecto

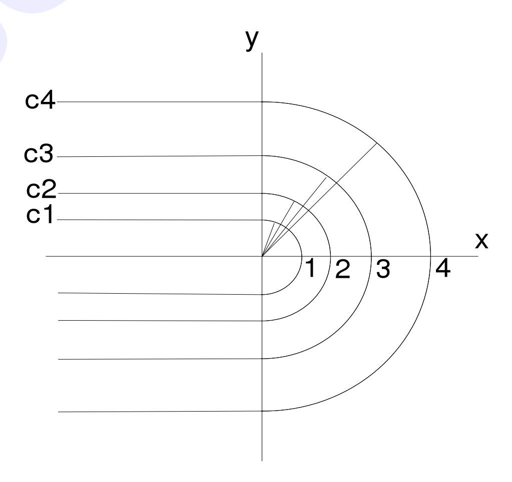


Figura 2.7: Ejemplo 2 de curvas de nivel

Las curvas de nivel proporcionan una información parcial sobre la gráfica de una función de dos variables; en el caso de funciones escalares de tres variables se introduce el concepto

análogo de superficie de nivel

Definición 2.6 (Superficie de nivel)

Se denomina superficie de nivel de valor constante k *de la función* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *al conjunto*

$$C_k \triangleq \{(x, y, z) \in D \quad \backslash . \quad f\,(x, y, z\,) = k\}\,,$$

donde k *es un valor perteneciente a la imagen de la función .*

Ejemplo 2.6

Si imponemos que la función $f\,(x, y, z\,) = x^2 + y^2 + z^2$ tome un valor constante k, obtenemos

$$f = k \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k \geq 0,$$

que es la ecuación de la esfera de radio $\sqrt{k}$ centrada en el origen.

Las curvas y superficies de nivel son casos particulares de lo que se llaman conjuntos de nivel en funciones escalares dependientes de un número q de variables independientes; estos conjuntos se definen de la siguiente forma

Definición 2.7

Se denomina conjunto de nivel de valor constante k *de la función* $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *al lugar geométrico*

$$C_k \triangleq \{(x_1, x_2, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^q \backslash . \; f\,(x_1, x_2, \cdots, x_q\,) \; = k\}\,,$$

donde k *es un valor perteneciente a la imagen de la función .*

2.2.3 Secciones de una gráfica

Otra herramienta, que aporta información complementaria sobre la gráfica de una función , son las secciones. De forma general, una sección es el lugar geométrico de los puntos que pertenecen a la intersección de la gráfica de la función con un plano. En nuestro caso nos centraremos

en las secciones verticales con planos coordenados

Definición 2.8 (Secciones de una función de dos variables)

Dada $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \in D \longrightarrow f(x,y)$*, una función escalar de 2 variables con dominio de definición* D*, introducimos las secciones con los planos* $x = k$ *e* $y = k$ *como los conjuntos*

$$S_f^{x=k} = \{(k, y, f(k,y)) \ \backslash. \ (k,y) \in D\},$$

$$S_f^{y=k} = \{(x, k, f(x,k)) \ \backslash. \ (x,k) \in D\}.$$

Ejemplo 2.7 (Secciones de $f(x,y) = x^2 + y^2$)

Estudiemos, como ejemplo sencillo, las secciones de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ con respecto a planos verticales $x = k$ e $y = k$. Según la definición precedente

$$S_f^{x=k} = \left\{ \left(k, y, k^2 + y^2\right) \ \backslash. \ y \in \mathbb{R} \right\},$$

y

$$S_f^{y=k} = \left\{ \left(x, k, x^2 + k^2\right) \ \backslash. \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

En la figura se muestra la sección de la gráfica de f con el plano $x = 0$.

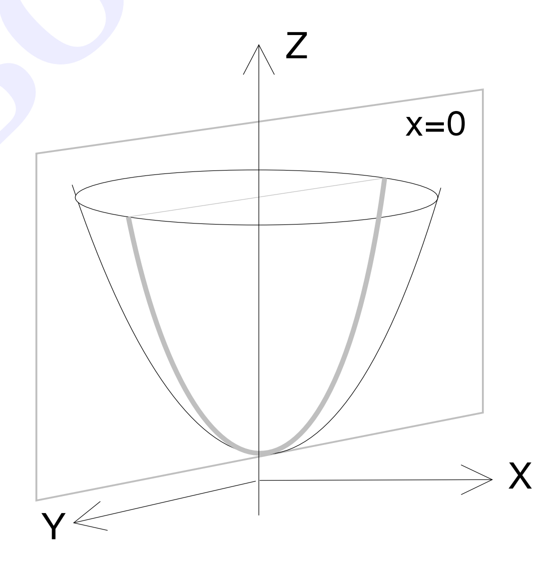
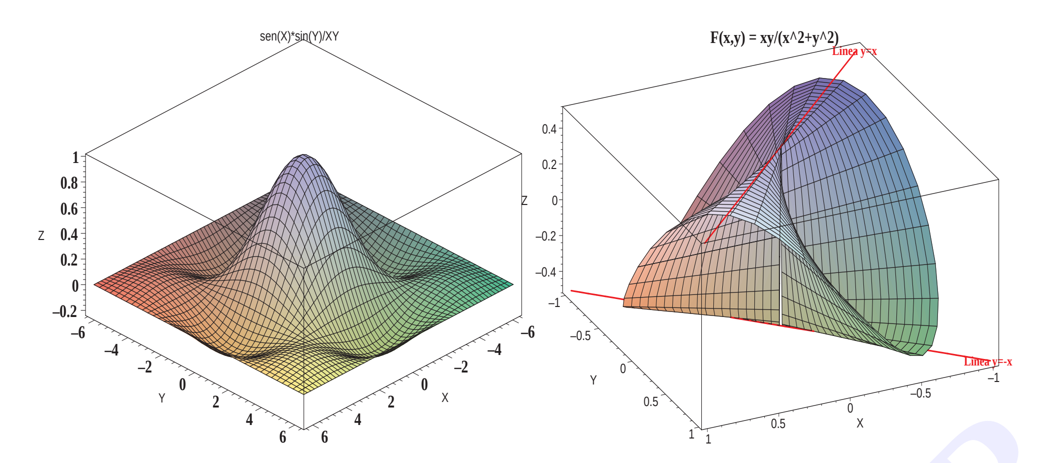


Figura 2.8: Ejemplo de sección



Gráficas de las funciones $f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)/xy$ y $g(x,y) = xy/(x^2+y^2)$.

La generalización a un número cualquiera de dimensiones no plantea dificultades especiales

Definición 2.9 (Secciones de una función escalar en $\mathbb{R}^q$)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x_1, x_2, \cdots, x_q) \in D \longrightarrow f(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ *una función escalar de* q *variables definida en el conjunto* D*; llamamos sección con* $x_i = k$ *a la intersección de la gráfica de la función con el plano* $\Pi : x_i = k$*, es decir*

$$S_f^{x_i=k} \triangleq G_f \cap \Pi = \{(x_1, \cdots, k, \cdots, x_q, f(x_1, \cdots, k, \cdots, x_q)) \in \mathbb{R}^{q+1} \\ \backslash. \ (x_1, \cdots, k, \cdots, x_q) \in D\},$$

Recomendamos que antes de pasar al estudio de la continuidad de las funciones escalares, el lector realice una excursión por los suplementos 2.A y 2.B, donde se estudian las superficies cuádricas más importantes y las regiones delimitadas por dichas superficies.

2.3 Límites y continuidad de funciones escalares

Comparemos el comportamiento de las funciones

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{xy} \quad \text{y} \quad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

cuando x e y tienden a cero de manera que (x,y) se aproxima a $(0,0)$ tanto como se quiera pero sin alcanzarlo. Resulta necesario imponer esta condición ya que ninguna de las dos funciones está definida en el origen de coordenadas. Una forma de estudiar el comportamiento de una función cerca del origen consiste en elaborar una tabla de valores que contenga entradas con valores de x e y cada vez más próximos a cero. Nosotros, sin embargo, utilizaremos un programa como MAPLE que elabora internamente dichas tablas y representa las gráficas de ámbas funciones; el resultado se muestra en la siguiente figura

Resulta obvio que los valores de f se aproximan a un mismo valor $z = 1$ independientemente del camino de aproximación elegido, mientras que los valores que toma g dependen de la tra-

yectoria de aproximación al origen; en particular si dicha trayectoria es $y = x$ los valores de la función tienden a $z = 1$, por el contrario la función se aproxima a $z = -1$ cuando $y = -x$, y a $z = 0$ si nos aproximamos al origen por la recta $x = 0$.

En general, empleamos la notación

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

para indicar que los valores de la función se aproximan a L cuando el punto (x, y) tiende a (x_0, y_0), cualquiera que sea la trayectoria de aproximación. Es decir, podemos hacer que $f(x,y)$ se aproxime a L tanto como se quiera tomando el punto (x, y) suficientemente próximo a (x_0, y_0), con la única restricción que $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Por ello, en nuestro ejemplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{xy} = 1, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

Definición 2.10 (Límite de una función de dos variables)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de dos variables definida en D y $(x_0, y_0) \in D'$ un punto de acumulación de D. Se dice que L es el límite de $f(x,y)$ cuando (x, y) se aproxima a (x_0, y_0), o simbólicamente

$$L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in D$ que satisfaga la desigualdad $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, se cumple que $|f(x,y) - L| < \epsilon$.

Otra notación habitual para denotar el límite de una función es

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} L.$$

Antes de dar la definición general o las propiedades más importantes de los límites conviene detenerse brevemente en la definición anterior:

1. La existencia del límite de la función f en el punto (x_0, y_0) tiene su implicación sobre la gráfica de la función . Dado que de la desigualdad $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ se deduce que $|f(x,y) - L| < \epsilon$, las imagenes de todos los puntos del disco reducido $B^*((x_0, y_0), \delta)$ se encuentran dentro de la banda de anchura 2ϵ delimitada por los planos $z = L - \epsilon$ y $z = L + \epsilon$.

2. $|f(x,y) - L|$ es la distancia existente entre los valores $f(x,y)$ y L; a su vez, la distancia entre los puntos (x, y) y (x_0, y_0) viene dada por la expresión $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Por lo tanto nuestra definición afirma que $L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ si la distancia entre $f(x,y)$ y L puede hacerse arbitrariamente pequeña sin más que disminuir apropiadamente la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0), con la condición de que $d[(x,y), (x_0,y_0)] > 0$.

3. Este último hecho es importante: el concepto de límite está relacionado con el comportamiento de la función cerca del punto (x_0, y_0), no en el propio punto; de hecho no es necesario que la función esté definida en (x_0, y_0) para que exista el límite. En general, podemos calcular el límite de una función en cualquier punto de acumulación de su dominio.

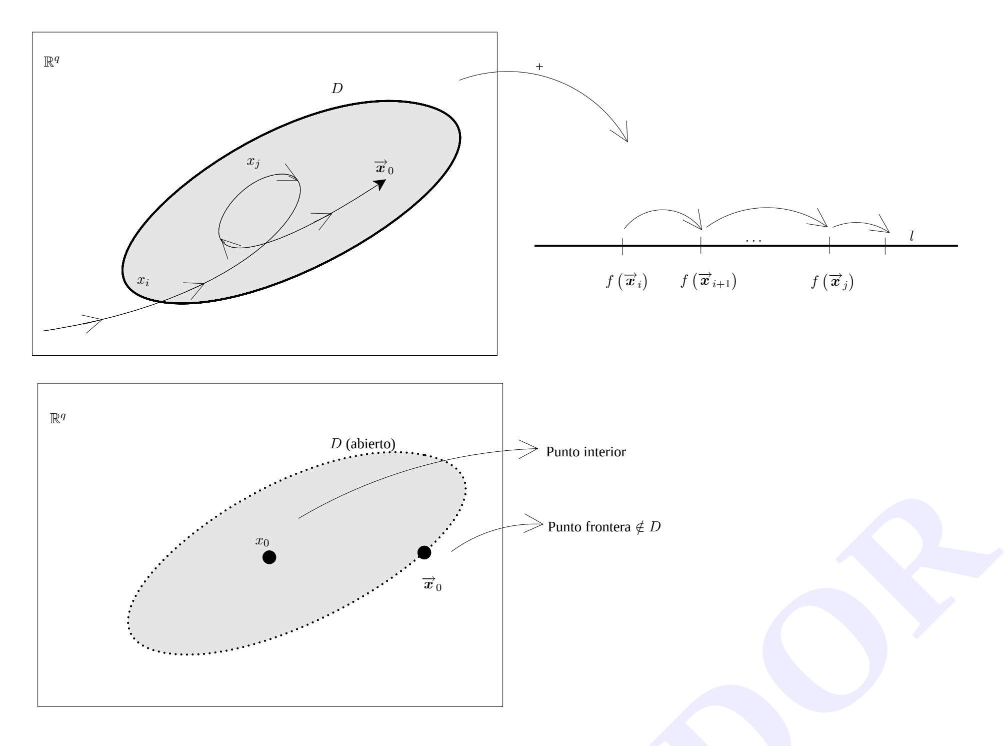


Figura 2.9: Límites

4. En el caso de funciones de una variable el punto x sólo puede aproximarse a x_0 de dos formas distintas: desde la izquierda y desde la derecha. El caso de las funciones escalares de dos variables es mucho más complejo ya que (x, y) puede aproximarse a (x_0, y_0) de infinitas formas; la única condición que imponemos es que el camino de aproximación esté contenido en el dominio de definición de la función .

5. Supongamos que L es el límite de $f(x, y)$ cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0). Como la definición de límite sólo involucra distancias y no la forma en que nos aproximamos a (x_0, y_0), la función debe tender al mismo valor independientemente del camino seguido. Por ello, en los casos en los que la función tiende a valores diferentes por caminos de aproximación distintos, podemos afirmar que el límite no existe.

La generalización del concepto de límite en $\mathbb{R}^2$ a un espacio euclídeo arbitrario es inmediata y no aporta elementos nuevos. En general el estudio de las funciones de más de dos variables no aporta conceptos o matices nuevos y, por el contrario, complica la notación e introduce dificul-

tades de tipo práctico.

Definición 2.11 (Límite de una función escalar)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real y $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in D'$ un punto de acumulación de su dominio D. Se dice que L es el límite de f en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ si y sólo si:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ \backslash.\ \left| f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - L\right| < \epsilon \text{ si } \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D \text{ y } 0 < \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\| < \delta.$$

Expresamos simbólicamente que L es el límite de f en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ como

$$L = \lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right),\ \text{ó } f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} L$$

Las propiedades más importantes de los límites de una función escalar se recogen en el siguiente teorema

Teorema 2.1 (Propiedades fundamentales de los límites)

1. *Si $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} L$, entonces el límite L es único.*
2. *Si $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} L$, entonces $g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - L \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} 0$.*
3. *Sean f y g dos funciones reales definidas en $D \subset \mathbb{R}^q$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \overline{D}$; si $f \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} L$, $g \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} M$ con $M, L \in \mathbb{R}$ se cumple:*
   a) $(f+g)\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} L + M$
   b) $(fg)\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} LM$
   c) $f/g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \xrightarrow{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0} \frac{L}{M}$ *si* $M \neq 0$ *y* $g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \neq 0$ *cuando* $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$.

Demostración 2.1

Para ahorrar espacio y no castigar demasiado los nervios del lector nos limitaremos a demostrar unas pocas de estas propiedades

1. Supongamos que $\exists\, L_1 \neq L_2 \in \mathbb{R} \ \backslash.\ f \to L_1$ y $f \to L_2$ cuando $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$, entonces se cumple simultáneamente que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1(\epsilon) \ \backslash.\ 0 < \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\| < \delta_1 \ \to |f - L_1| < \epsilon,$$

y

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta_2(\epsilon) \ \backslash.\ 0 < \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\| < \delta_2 \ \to |f - L_2| < \epsilon.$$

Por lo tanto, eligiendo $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ las dos condiciones se funden en una sola

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\epsilon) > 0 \ \backslash.\ 0 < \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\| < \delta \to \begin{cases} |f - L_1| < \epsilon, \\ |f - L_2| < \epsilon, \end{cases}$$

Utilizando la desigualdad triangular resulta

$$|L_1 - L_2| \leq |f - L_1| + |f - L_2| < 2\epsilon,$$

o lo que es lo mismo

$$\epsilon > |L_1 - L_2|/2.$$

Ahora bien, este resultado es absurdo ya que la existencia de dos límites implica que $|f - L_i| < \epsilon$ para cualquier valor real positivo de ϵ y no sólo cuando $\epsilon > |L_1 - L_2|/2$. Por lo tanto la hipótesis inicial que establece la existencia de dos límites distintos es falsa.

2. Si $f \to L$ podemos afirmar que

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \backslash . \quad |f - L| < \epsilon \text{ si } \vec{x} \in D \text{ y } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta.$$

Ahora bien, $f - L = g - 0$, con lo cual podemos reescribir la frase precedente como

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ \backslash . \quad |g - 0| < \epsilon \text{ si } \vec{x} \in D, \text{ y } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta,$$

lo cual nos garantiza que $g \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} 0$.

3(b) Estudiemos el comportamiento de la función $h = fg - LM$. Sumando y restando el producto fM

$$h = fg - fM + fM - LM = f(g - M) + M(f - L).$$

Ahora bien, cuando $\vec{x} \to \vec{x}_0$ se verifica que $f \to L$, $g - M \to 0$ y $f - L \to 0$, por lo que

$$h \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} 0 \Rightarrow fg \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} LM.$$

Teorema 2.2

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y $\vec{x}_0 \in D'$ un punto de acumulación de su dominio; si $f\left(\vec{x}\right) \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} L$, entonces para cualquier curva C que pase por $\vec{x}_0$ se verifica que[a]

$$\lim_{t \to t_0} f\left(\vec{r}(t)\right) = L,$$

donde $\vec{r}\,(t)$ es una función vectorial que parametriza C y tal que $\vec{r}\,(t_0) = \vec{x}_0$.

[a] Si $\vec{x}_0 \in \partial D$ es necesario substituir el límite anterior por $\lim_{t \to t_0^{\pm}} f\left(\vec{r}(t)\right) = L$.

De ahora en adelante convenimos en denominar como **límites parciales** a los valores a los que tiende la función cuando nos aproximamos al punto $\vec{x}_0$ por caminos concretos.

Demostración 2.2

El teorema supone que se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) $f\left(\vec{x}\right) \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} L$, y por lo tanto

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ \backslash . \ \left|f\left(\vec{x}\right) - L\right| < \epsilon,$$

siempre que $\vec{x} \in D$ y $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$, es decir, siempre que $x \in B^*\left(\vec{x}_0, \delta\right) \subset D$.

b) La curva C pasa por el punto $\vec{x}_0$ y por lo tanto una parte de la curva está contenida en la bola $B^*\left(\vec{x}_0, \delta\right)$. Es decir, existe un Δt tal que $\overrightarrow{\boldsymbol{r}(t)} \in B^*\left(\vec{x}_0, \delta\right)$ si el argumento $t \in [t_0 - \Delta t, t_0 + \Delta t]$. Veamos que implica este hecho

$$Si\,|t-t_0|<\Delta t \rightarrow \vec{\boldsymbol{x}}=\overrightarrow{\boldsymbol{r(t)}} \in B^*\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0,\delta\right),$$

y de acuerdo con el punto a)

$$\left|f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)-L\right|=\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r(t)}}\right)-L\right|<\epsilon.$$

Así, estamos ante la condición que establece la existencia del límite de la función $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r(t)}}\right)$, ya que

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\,\Delta t\ \setminus.\ \left|f\left(\vec{\boldsymbol{r}}\,(t)\right)-L\right|<\epsilon \text{ si } t\in[t_0-\Delta t,t_0+\Delta t].$$

⟵⟶

Este resultado es particularmente útil, ya que permite descartar la existencia del límite en algunos casos y sugiere (pero no demuestra) el valor del mismo en otros. Ya habíamos comentado que si una función tiende a valores diferentes por caminos de aproximación distintos el límite no existe. De manera más formal podemos afirmar que si existe (al menos) una curva

$$C:\vec{\boldsymbol{r}}\,(t)\ \ \setminus.\ \ \vec{\boldsymbol{r}}\,(t_0)\ =\vec{\boldsymbol{x}}_0,$$

y podemos demostrar que la función $f\left(\vec{\boldsymbol{r}}\,(t)\right)$ no tiene límite en $t=t_0$, automáticamente podemos concluir que la función f no tiene límite en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$. De forma análoga, si existen (al menos) dos curvas

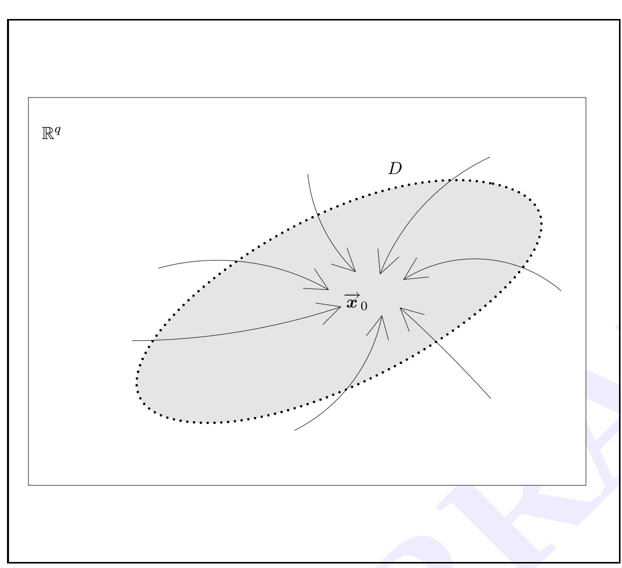


Figura 2.10: Límites y trayectorias

$$C_1:\vec{\boldsymbol{r}}_1(t)\ \setminus.\ \vec{\boldsymbol{r}}_1(t_0)=\vec{\boldsymbol{x}}_0,$$
$$C_2:\vec{\boldsymbol{r}}_2(t)\ \setminus.\ \vec{\boldsymbol{r}}_2(t_0)=\vec{\boldsymbol{x}}_0,$$

tales que

$$\lim_{t\to t_0} f\left(\vec{\boldsymbol{r}}_1(t)\right)\neq\lim_{t\to t_0} f\left(\vec{\boldsymbol{r}}_2(t)\right),$$

la existencia del límite de la función en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ queda descartada.

Es importante recalcar que, por el contrario, el hecho de que los límites parciales de la función a lo largo de varios caminos distintos coincidan no demuestra la existencia del límite, sólo sugiere su existencia.

Ejemplo 2.8 (Límites parciales de una función)

Utilicemos el resultado precedente para demostrar que la función

$$f\,(x,y)\ =\frac{xy+y^3}{x^2+y^2},$$

no tiene límite en $(0,0)$. Para ello seguimos varios caminos de aproximación al origen, como por ejemplo:

1. $y=0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\frac{xy+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

2. $x = 0$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

3. $y = x$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Dado que el límite depende del camino seguido para aproximarnos al origen de coordenadas, esto es, su valor es distinto según nos acerquemos por la recta $x = y$ ó por las rectas $y = 0$ y $x = 0$, la función no tiene límite en $(0, 0)$.



Si el estudio de los límites parciales puede demostrar que no existe límite, la demostración rigurosa de su existencia pasa necesariamente por verificar que se cumple la definición. El siguiente ejemplo nos muestra como debemos proceder

Ejemplo 2.9 (Cálculo riguroso del límite de una función)

Obtenga el límite (si existe) de la función

$$f\left(x, y\right) = \frac{2x^2(y+1) + y^2}{2x^2 + y^2},$$

cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

Para ello procederemos en tres fases o pasos diferentes, a saber:

i) El primer paso debe ser la aplicación de las propiedades de los límites. Así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x, y\right) = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2(y+1) + y^2}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x^2 + y^2} = \frac{0}{0}.$$

Desafortunadamente, este resultado no es sólo una indeterminación, sino que es incorrecto ya que la propiedad 3c no puede aplicarse cuando el límite del denominador es cero.

ii) En una segunda fase intentaremos descartar la existencia del límite estudiando su dependencia de la trayectoria de aproximación al origen; podemos, por ejemplo, utilizar rectas con pendiente arbitraria

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f\left(x, y\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2(\lambda x + 1) + (\lambda x)^2}{2x^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\lambda x + 1) + \lambda^2}{2 + \lambda^2} = 1.$$

El valor de la función es siempre la unidad, independientemente de la recta por la que nos aproximemos al origen. Esto sugiere que el límite de la función cuando $(x, y) \to (0, 0)$ existe y es la unidad.

iii) Llegados a este punto la única avenida para obtener el límite es aplicar la definición. Consideremos $\delta > 0$ y todos los puntos $(x, y)\,;\ 0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x + y} < \delta$, es decir, todos los puntos distintos del origen cuya distancia a éste es menor que δ. Entonces

$$\begin{aligned} |f\left(x, y\right) - 1| &= \left|\frac{2x^2(y+1) + y^2}{2x^2 + y^2} - 1\right| = \frac{|2xy + 2x + y - 2x - y|}{|2x + y|} \\ &= \overbrace{\frac{2x}{2x + y}}^{\leq 1} |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta. \end{aligned}$$

Este resultado muestra fehacientemente que a medida que nos aproximamos al origen el valor de la función tiende progresivamente a la unidad, independientemente del camino que sigamos. Para concluir que se satisface la condición de límite basta elegir $\epsilon = \delta$, de manera que[2]

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta (= \epsilon) \;\; \backslash. \;\; |f\,(x, y\,) - 1| < \epsilon \;\; \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

El concepto de paso al límite cuando $\vec{x}$ se aproxima a $\vec{x}_0$ está relacionado con el comportamiento de la función en una vecindad de $\vec{x}_0$, tan pequeña como se quiera, pero que excluye el punto central $\vec{x}_0$. Por tanto, la existencia del límite no garantiza que la función esté definida en $\vec{x}_0$. Cuando el límite existe y coincide con el valor de la función en el punto decimos que dicha función es continua.

Definición 2.12

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en el conjunto D y $\vec{x}_0 \in \overline{D}$ un punto cualquiera de la adherencia de dicho dominio; se dice que:

1. *f es continua en $\vec{x}_0$ si $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f\,(\vec{x}) = f\,(\vec{x}_0)$.*
2. *f es continua en $E \subset \overline{D}$ si lo es en cada punto del conjunto E.*
3. *f es discontinua en $\vec{x}_0$ si $\displaystyle\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f\,(\vec{x}) \neq f\,(\vec{x}_0)$.*

De acuerdo con esta definición los puntos de la frontera del dominio de definición donde la función no está definida son puntos de discontinuidad de la función . Asimismo, la función es discontinua en los puntos aislados de su dominio, que pertenecen a la adherencia, pero donde el límite no está definido.

El hecho de que una función sea continua en $\vec{x}_0$ puede expresarse también como

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \left(f\,(\vec{x}) - f\,(\vec{x}_0) \right) = 0,$$

de manera que un pequeño desplazamiento del punto $\vec{x}$ a partir de $\vec{x}_0$ sólo induce una pequeña variación en el valor de la función . Por esta razón las gráficas de las funciones de dos variables son superficies sin huecos ni rupturas.

Ejemplo 2.10 (Continuidad de una función definida a trozos)

Estudie la continuidad de la función

$$f\,(x, y\,) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}(y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

Para ello, debemos comprobar si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x, y\,) = f\,(0, 0\,) = 1$. El cálculo del límite de la función cuando (x, y) se aproxima al origen requiere que estudiemos el comportamiento de la función en puntos muy próximos, pero excluyendo el propio origen. En estos puntos

$$f\,(x, y\,) = \frac{\operatorname{sen}(x^2) + \operatorname{sen}(y^2)}{x^2 + y^2},$$

y como $|x|$ e $|y| \ll 1$ podemos desarrollar las funciones $\operatorname{sen}(x^2)$ y $\operatorname{sen}(y^2)$ en serie de potencias, es decir

[2] En realidad la condición de límite se satisface igualmente si imponemos que $\delta \leq \epsilon$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x^2)+\operatorname{sen}(y^2) &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left((x)^{2p+1}+(y)^{2p+1}\right)\\ &= x^2+y^2+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\left((x)^{2p+1}+(y)^{2p+1}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x,y) = 1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\frac{(x^2)^{2p+1}+(y^2)^{2p+1}}{x^2+y^2}.$$

Demostraremos ahora que todos y cada uno de los términos de la serie, excepto el primero, tiene límite nulo cuando $(x,y)\to(0,0)$. En efecto, se cumple

$$0\le\frac{(x^2)^{2p+1}+(y^2)^{2p+1}}{x^2+y^2}\le\frac{(x^2+y^2)^{2p+1}+(y^2+x^2)^{2p+1}}{x^2+y^2}=2(x+y)^{2p},$$

y tomando límites

$$0\le\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2)^{2p+1}+(y^2)^{2p+1}}{x^2+y^2}\le 2\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{2p}.$$

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{2p}=0$ si $p>0$. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2)^{2p+1}+(y^2)^{2p+1}}{x^2+y^2}=0,$$

con lo cual se obtiene trivialmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

o en otros términos, la función es continua en $(0,0)$.

Teorema 2.3 (Propiedades de las funciones continuas)

Sean $f:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones escalares definidas en el conjunto D y $h:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función real de una variable real definida en el intervalo I. Se cumple que:

1. *Si $f(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0\in D$, entonces está acotada «cerca» de $\vec{x}_0$.*
2. *Si $f(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0\in D$ y $f(\vec{x}_0)\neq 0$, entonces la función tiene signo constante «cerca» de $\vec{x}_0$.*
3. *Si las funciones f y g son continuas en $\vec{x}_0\in D$, entonces $f+g$, fg y f/g (siempre que $g(\vec{x}_0)\neq 0$) son continuas en $\vec{x}_0$.*
4. *Si $f(\vec{x})$ es continua en $\vec{x}_0\in D$ y $h(z)$ es continua en $f(\vec{x}_0)\in I$, entonces $h\circ f(\vec{x})=h(f(\vec{x}))$ es continua en $\vec{x}_0$.*

Ejemplo 2.11 (Continuidad de una función dependiente de parámetros)

Apliquemos estas propiedades al estudio de la continuidad de la función

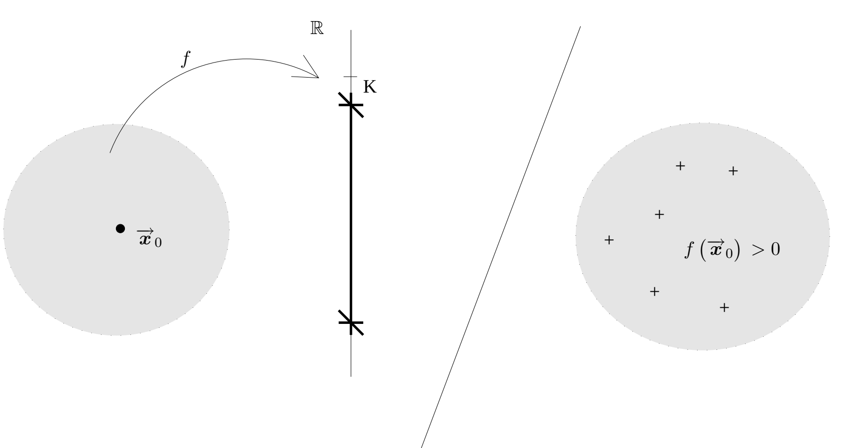


Figura 2.11: Propiedades de las funciones continuas (1,2)

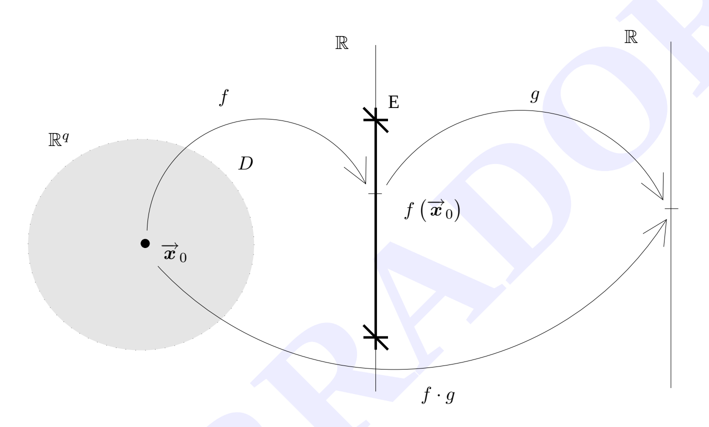


Figura 2.12: Propiedades de las funciones continuas (4)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha} y^{\beta}}{x^2 + y^2 + xy} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases} \quad \text{con } \alpha, \beta = 1, 2, \ldots$$

Cuando no se especifica el punto (o puntos) donde debemos estudiar la continuidad de la función entenderemos que el enunciado se refiere a todo su dominio de definición . La función se haya definida en todo $\mathbb{R}^2$ por lo que el estudio de la continuidad debe abarcar el plano. Fuera del origen está definida como una función racional de manera que será continua, salvo en aquellos puntos donde el denominador se anule. Dado que el denominador $x + y + xy$ sólo se anula si $(x,y) = (0,0)$ la función es continua para $(x,y) \neq (0,0)$. En el origen la definición es distinta a la del resto del plano por lo que deberemos calcular el límite de la función de manera explícita.

Ejercicio:
Dejaremos que el lector demuestre que la ecuación $x + y + xy = 0$ sólo se satisface si $x = y = 0$.

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Admitiendo que el denominador sólo se anula en el origen, las propiedades enunciadas en el teorema 4.3 permiten concluir de forma inmediata que la función es continua fuera del origen.

- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Para determinar si $f(x,y)$ es continua debemos estudiar si $f(0,0) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} f(0,0) = 1$. Para ello seguiremos los pasos habituales. Primero nos aproximaremos al origen por rectas $y = \lambda x$ con la intención de descartar la existencia del límite. Así

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f\,(x,y) = \lim_{x\to 0} f\,(x,\lambda x) = \lambda^{\beta} \lim_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+\beta}}{x^2(1+\lambda+\lambda^2)}$$
$$= \frac{\lambda^{\beta}}{1+\lambda+\lambda^2} \lim_{x\to 0} x^{\alpha+\beta-2}.$$

Ahora bien $\dfrac{\lambda^{\beta}}{1+\lambda+\lambda^2}$ es un número real cualquiera que sea el valor de λ. Además

$$x^{\alpha+\beta-2} \begin{cases} \xrightarrow{x\to 0} 0 & \text{si } \alpha+\beta-2>0, \\ \xrightarrow{x\to 0} 0^0 & \alpha+\beta=2, \\ \xrightarrow{x\to 0} \infty & \alpha+\beta<2. \end{cases}$$

Por lo tanto la existencia de límite queda descartada si $\alpha+\beta\leq 2$. En este caso la aproximación por rectas nos ha permitido acotar el problema descartando parte de los valores que pueden tomar α y β. Cuando $\alpha+\beta>2$ el resultado anterior sugiere que el límite vale cero; para demostrar la validez de esta afirmación consideramos puntos (x,y) tales que $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$. Entonces

$$|f\,(x,y)-0| = \frac{\left|x^{\alpha}y^{\beta}\right|}{|x^2+y^2+xy|} = r^{\alpha+\beta-2}\frac{\left|\cos^{\alpha}\theta\,\mathrm{sen}^{\beta}\,\theta\right|}{|1+\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|},$$

donde hemos efectuado un cambio a coordenadas polares. Teniendo en cuenta que $\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(2\theta)/2$

$$|f\,(x,y)-0| = r^{\alpha+\beta-2}\frac{|\cos\theta|^{\alpha}\,|\mathrm{sen}\,\theta|^{\beta}}{\left|1+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta)\right|} \leq 2r^{\alpha+\beta-2} < 2\delta^{\alpha+\beta-2}.$$

Eligiendo $\epsilon = 2\delta^{\alpha+\beta-2}$ e invirtiendo la relación, resulta

$$\forall\,\epsilon>0\;\exists\,\delta = \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}} \;\backslash.\;\; |f-0|<\epsilon \text{ siempre que } 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta,$$

o en otras palabras $f\,(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} f\,(0,0)$.

Resumiendo los distintos casos tenemos que la función es continua en:

1. $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\,,\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{R}^2$ cuando $\alpha+\beta>2$.

2.4 Derivabilidad de una función escalar

Sabemos que la gráfica de una función continua no presenta huecos ni rupturas. Los estudios del primer cuatrimestre nos permiten afirmar que las gráficas de las funciones reales de una variable real diferenciables son además suaves, es decir, no presentan picos ni dobleces abruptos. De forma más precisa, podemos afirmar que las gráficas de estas funciones admiten una recta tangente en todos y cada uno de sus puntos. Por similitud deberíamos exigir que las gráficas de las funciones escalares diferenciables en $\mathbb{R}^q$ admitiesen un (hiper)plano tangente en todos sus puntos.

Sin embargo, la cuestión de la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^q$ es más complicada de lo que parece y por ello avanzaremos poco a poco. Un primer paso en esa dirección consiste en la introducción de los conceptos de derivada parcial y derivada direccional.

Definición 2.13 (Derivadas parciales de una función escalar en $\mathbb{R}^2$)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de dos variables definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in \mathring{D}$ un punto interior de D. Llamamos entonces derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) a

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

y derivada parcial de f con respecto a y en el punto (x_0, y_0) a

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que estos límites existan.

Análogamente, se definen las funciones derivada parciale de f con respecto a x e y como

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &\triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &\triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}. \end{aligned}$$

cuyos dominios de definición están formados por todos los puntos interiores de D donde estos límites estén bien definidos.

Es conveniente efectuar ahora algunos comentarios sobre la definición precedente:

1. La notación que hemos utilizado para denotar las derivadas parciales no es única; otras notaciones alternativas son

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f'_x(x, y) = \partial_x f(x, y),$$

2. El cociente incremental que aparece en la definición de derivada parcial sólo depende de la variable real h; x e y se toman como constantes. Por tanto son de aplicación todas las reglas, trucos, etc., del cálculo de límites de funciones de una variable.

3. Las derivadas parciales sólo están definidas en el interior del dominio de la función . Sólo de esta forma podemos definir el límite del cociente incremental, que involucra los límites por la derecha y por la izquierda en el caso de $f'_x(x, y)$ y límites por abajo y por arriba en el caso de $f'_y(x, y)$.

4. Con el fin de facilitar la definición de derivada direccional reescribimos las derivadas parciales de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x,y)+h\vec{\imath}\right)-f(x,y)}{h},\\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x,y)+h\vec{\jmath}\right)-f(x,y)}{h},
\end{aligned}$$

Este último resultado sugiere generalizar la definición de derivada parcial para introducir el concepto de derivada direccional.

Definición 2.14 (Derivada direccional de una función escalar en $\mathbb{R}^2$)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar de dos variables definida en* $D \subset \mathbb{R}^2$ *y* $(x_0, y_0) \in \mathring{D}$ *un punto interior de* D*. Se define la derivada direccional de* f *en el punto* (x_0, y_0) *y con respecto al vector unitario* $\vec{u}$ *como*

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0) \triangleq \lim_{h\to 0} \frac{f\left((x_0,y_0)+h\vec{u}\right)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

siempre que el límite exista.

Se denomina función derivada direccional según el vector unitario $\vec{u}$ *a la regla que a cada punto interior de* $(x,y) \in \mathring{D}$*, le asocia el valor (vectorial)* $f'_{\vec{u}}(x,y)$ *.*

Según esta definición $f'_x(x,y) = f'_{\vec{\imath}}(x,y)$ y $f'_y(x,y) = f'_{\vec{\jmath}}(x,y)$. Si expresamos las componentes del vector unitario como $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, la derivada direccional se escribe también

$$f'_{\vec{u}}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cos\theta, y+h\operatorname{sen}\theta)-f(x,y)}{h},$$

expresión que utilizaremos habitualmente en los cálculos prácticos.

Ejemplo 2.12

Estudiemos las derivadas parciales y direccionales de la función $f(x,y) = e^{xy}$ en un punto interior genérico de su dominio de definición . Aplicando la definición de derivada parcial tenemos

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h)y}-e^{xy}}{h} = e^{xy}\lim_{h\to 0} \frac{e^{yh}-1}{h},$$

y utilizando L'hopital para salvar la indeterminación del límite en h

$$f'_x(x,y) = e^{xy}\lim_{h\to 0} ye^{hy} = ye^{xy}.$$

De forma análoga

$$f'_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x(y+h)}-e^{xy}}{h} = e^{xy}\lim_{h\to 0} \frac{e^{xh}-1}{h} = xe^{xy}.$$

Utilizando la definición de derivada direccional según el vector $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, resulta

$$f'_{\vec{u}}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(x+h\cos\theta)(y+h\operatorname{sen}\theta)}-e^{xy}}{h},$$

y eliminado la indeterminación mediante la regla de L'hopital obtenemos

$$\begin{aligned}
f'_{\vec{u}}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\left(y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta + 2h\operatorname{sen}\theta\cos\theta\right)e^{(x+h\cos\theta)(y+h\operatorname{sen}\theta)}\\
&= e^{xy}\left(y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta\right) = e^{xy}\left\langle (y,x), \vec{u}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Obsérvese que podemos recuperar las derivadas parciales utilizando la expresión obtenida para las derivadas direccionales. En efecto

$$f'_x(x,y) = f'_{\vec{\imath}}(x,y) = e^{xy}\left\langle (y,x), \vec{\imath} \right\rangle = ye^{xy},$$

$$f'_y(x,y) = f'_{\vec{\jmath}}(x,y) = e^{xy}\left\langle (y,x), \vec{\jmath} \right\rangle = xe^{xy},$$



Evidentemente, los conceptos de derivada parcial y direccional se generalizan facilmente al caso de espacios euclídeos de dimensión genérica

Definición 2.15 (Derivadas parciales de funciones escalares)

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar, dependiente de* q *variables reales, definida en* $D \subset \mathbb{R}^q$ *y* $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ *un punto interior de su dominio. Llamamos derivada parcial de* f *en el punto* $\vec{x}_0$ *con respecto a la variable* x_i *a*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} &\triangleq \lim_{h\to 0} \frac{f\left(x_{0_1},\cdots,x_{0_i}+h,\cdots,x_{0_q}\right) - f\left(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0q}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\left(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i\right) - f\left(\vec{x}_0\right)}{h},
\end{aligned}$$

siempre que este límite exista.

Se llama función derivada parcial con respecto a x_i *a la función*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \ \backslash. \ \forall \vec{x} \in \overset{\circ}{D} \to \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}.$$

En el caso general también existen notaciones alternativas para las derivadas parciales; entre las más habituales tenemos

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = f'_{x_i}(\vec{x}) = \partial_{x_i} f(\vec{x}) = f'_{\vec{e}_i}(\vec{x}),$$

donde la última es la notación que utlizaremos habitualmente para denotar una derivada direc-

cional. La definición de éstas es

Definición 2.16 (Derivada direccional en $\mathbb{R}^q$)

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función escalar definida en* $D \subset \mathbb{R}^q$, $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$ *un punto interior de su dominio, y* $\vec{u}$ *un vector unitario cualquiera. Se define entoces la derivada direccional de* f *en el punto* $\vec{x}_0$ *y según el vector* $\vec{u}$ *como el límite*

$$f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right) \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\vec{x}_0 + h\vec{u}\right) - f\left(\vec{x}_0\right)}{h},$$

si éste existe.

Se llama función derivada direccional según el vector unitario $\vec{u}$ *a*

$$f'_{\vec{u}} : \mathring{D} \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R} \ \backslash. \ \forall \vec{x} \in \mathring{D} \to f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}\right).$$

Antes de enumerar las propiedades más importantes de las derivadas parciales, centraremos nuestra atención en los tres ejemplos siguientes, que nos servirán de justificación de dichas propiedades.

Ejemplo 2.13

En el ejemplo 2.12 utilizamos la definición de derivada parcial de primer orden para calcular las de la función $z = e^{xy}$. Habíamos obtenido las siguientes expresiones

$$f'_x\left(x, y\right) = ye^{xy}, \quad f'_y\left(x, y\right) = xe^{xy}.$$

Consideremos ahora que y toma el valor constante, $y = c$, y definamos la función $g\left(x\right) \triangleq f\left(x, y = c\right) = e^{cx}$; derivando con respecto a x, resulta

$$g'\left(x\right) = ce^{cx} = ye^{xy} = f'_x\left(x, y\right).$$

Análogamente, tomando x como constante una constante $x = c$, definiendo $h\left(x\right) \triangleq f\left(x = c, y\right) = e^{cy}$ y derivando con respecto a y, tenemos

$$h'\left(y\right) = ce^{cy} = xe^{xy} = f'_y\left(x, y\right).$$

Este ejemplo sugiere que podemos calcular la derivada parcial de una función con respecto a una variable dada considerando las restantes variables como constantes y derivando la función con respecto a la primera, como si se tratase de una función de una sóla variable.

Ejemplo 2.14

Obtenga las funciones derivada de la función definida a trozos

$$f\left(x, y\right) = x + \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } \left(x, y\right) \neq \left(0, 0\right) \ ; \ 0 \text{ si } \left(x, y\right) = \left(0, 0\right).$$

$(x, y) \neq (0, 0).$ Aplicamos las reglas de derivación estándar a la parte izquierda de la definición y obtenemos

$$f'_x\left(x, y\right) = 1 - \frac{(x^2 - y^2)y}{(x^2 + y^2)^2} \ ; \ f'_y\left(x, y\right) = \frac{(x^2 - y^2)x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Estas expresiones no están definidas en el origen de coordenadas, y sin embargo la función posee derivadas en dicho punto; en efecto

$\boxed{(x, y) = (0, 0).}$ Dado que este punto es singular y la definición de f cambia con respecto a la de los puntos adyacentes aplicaremos la definición de derivada. El resultado es

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1,$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Por lo tanto las derivadas parciales son en este caso las siguientes funciones definidas a trozos

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{(x^2-y^2)y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases} ;\ f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)x}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejemplo 2.15

Demuestre que la función definida a trozos

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y} \text{ si } y \neq 0\ ;\ 0 \text{ si } y = 0.$$

posee todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ y, sin embargo, no es continua en dicho punto.

Las derivadas direccionales en el origen de coordenadas vienen dadas por

$$f'_u(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h\cos\theta, 0 + h\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\,\mathrm{sen}\,\theta)}{h},$$

donde $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$. Llegados a este punto debemos proceder con cierto cuidado. Para ello consideramos por separado los dos casos:

$\boxed{\theta = 0 \text{ ó } \pi.}$ En este caso $y = 0$ y por lo tanto $f(\pm h, 0) = 0$. Además el vector unitario es $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \pm\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}$. En consecuencia

$$f'_{\pm\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\pm h, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$\boxed{\theta \neq 0 \text{ ó } \pi.}$ Dado que $y \neq 0$ podemos escribir que

$$f'_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\,\mathrm{sen}\,\theta)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3\cos^3\theta}{h\,\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{\cos^3\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} \lim_{h\to 0} h^2.$$

Como $\theta \neq 0$ ó π el factor trigonométrico que precede al límite es un número real bien definido y además es obvio que $\lim_{h\to 0} h^2 = 0$. Por lo tanto $f'_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(0,0) = 0$ si $\theta \neq 0$ ó π.

Reuniendo los dos resultados, resulta que

$$f'_{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}}(0,0) = 0\ \forall\ \overrightarrow{\boldsymbol{u}},$$

es decir, la función posee todas sus derivadas direccionales en $(0, 0)$ y son nulas.

Comencemos ahora el estudio de la continuidad en $(0, 0)$ aproximándonos al origen de coordenadas por caminos diversos. Se deja como ejercicio la obtención de los límites parciales a lo largo de rectas $y = mx$. Se tiene que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} f(x,y) = 0.$$

Sin embargo, si elegimos un camino un poco más rebuscado como la cúbica $y = x^3$, resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^3}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Como los límites parciales dependen del camino de aproximación al origen podemos afirmar que la función no tiene límite en $(0,0)$ y en consecuencia no es continua en dicho punto. Este ejemplo nos proporciona un caso en el que existen todas las derivadas direccionales (y parciales), y sin embargo la función no es continua.



Teorema 2.4 (Propiedades de las derivadas)

1. *En el cálculo de las derivadas parciales son de aplicación general las reglas de derivación de las funciones de una variable real:*
   - *El procedimiento habitual para calcular $\partial_{x_i} f$ consiste en considerar todas las variables x_j con $j \neq i$ como constantes y derivar respecto a x_i.*
   - *La única excepción a esta regla surge en el caso de puntos donde la definición de la función es distinta de la definición en puntos adyacentes; entonces es obligatorio el cálculo de la derivada mediante su definición.*
2. *Las propiedades algebraicas de las derivadas parciales y direccionales son las mismas que las de las funciones de una variable real.*
3. *La existencia de todas las derivadas direccionales $f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right)$ no es condición necesaria ni suficiente para que $f\left(\vec{x}\right)$ sea continua en $\vec{x}_0$.*

2.4.1 Interpretación geométrica de las derivadas

La derivada de una función escalar de una variable real $f(x)$ tiene un significado geométrico claro: representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x, f(x))$. La derivada direccional de una función escalar multivariable posee un significado semejante.

Sea una función escalar $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivada direccional $f'_{\vec{u}}\left(\vec{a}\right)$ en el punto $\vec{a} \in \mathring{D}$. Para comprender el significado geométrico de la derivada direccional introducimos los siguientes elementos:

- La gráfica S de la función , es decir, la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\backslash.\; (x,y) \in D,\; z = f(x,y)\right\}.$$

- La recta l que pasa por el punto $\vec{a}$ y tiene como vector director a $\vec{u}$, $l:\; \vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{u}$.
- El plano Π que contiene el punto $\vec{a}$ y los vectores $\vec{u}$ (por lo tanto contiene a la recta l) y $\vec{k}$
- La curva C formada por la intersección de la superficie S y el plano Π

Observando la figura, es obvio que a cada punto $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{u}$, situado sobre l, le corresponde un punto situado sobre C cuya altura o cota es $f\left(\vec{a} + t\vec{u}\right)$.

Podemos entonces considerar a la curva C como la gráfica de la función

$$\Psi(t) = f\left(\vec{a} + t\vec{u}\right),$$

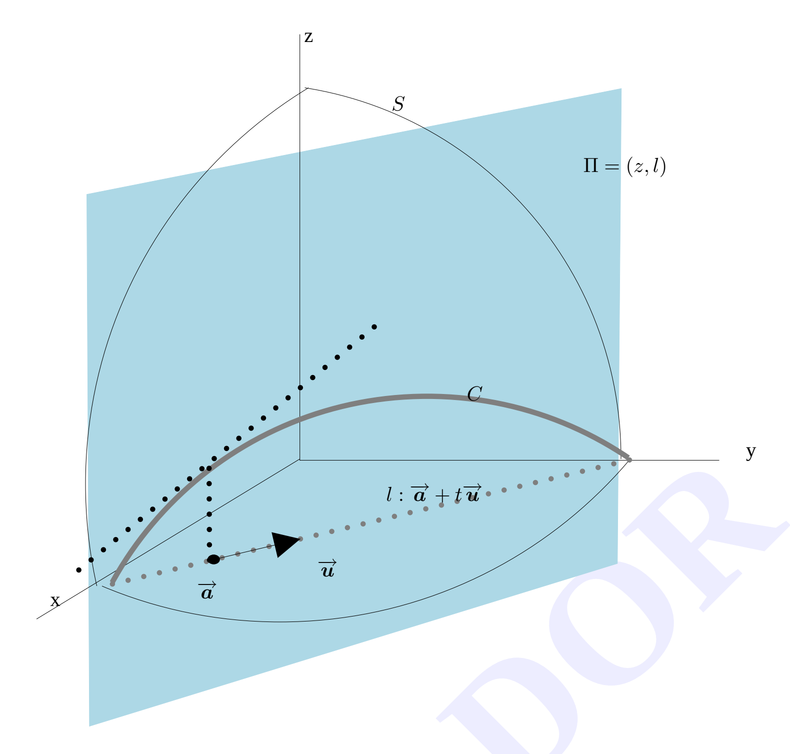


Figura 2.13: Interpretación geométrica de la derivada direccional

definida siempre que $\vec{a} + t\vec{u} \in \mathring{D}$. Para cada valor de t, la derivada $\Psi'(t)$ es la pendiente de la recta tangente a C en el punto correspondiente a t. Ahora bien, se cumple que

$$\psi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\psi(0+h) - \psi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} = f'_{\vec{u}}(\vec{a}),$$

es decir, la derivada $\Psi'_t(t=0)$ coincide con la derivada direccional de $f(\vec{x})$ en el punto $\vec{a}$, según la dirección orientada $\vec{u}$. Por lo tanto el número $f'_{\vec{u}}(\vec{a}) = f'_{\vec{u}}(a_x, a_y)$ nos da la pendiente de la recta tangente a la superficie S en el punto $(a_x, a_y, f(a_x, a_y))$ y según la dirección definida por $\vec{u}$.

2.5 Derivadas parciales de orden superior

De forma similar al caso de funciones escalares de una variable, resulta posible definir derivadas de orden superior de las funciones escalares en $\mathbb{R}^q$. Como no es muy habitual trabajar con derivadas direccionales de orden superior nos limitaremos a introducir las derivadas parciales de orden superior de una función escalar.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en el abierto $D \subset \mathbb{R}^q$. Si f tiene derivada parcial de primer orden f'_{x_i}, entonces la derivada $\left(f'_{x_i}\right)'_{x_j}$, si existe, se denomina derivada parcial segunda de f respecto de las variables x_i y x_j. Se denota como

$$f^{(2)}_{x_i x_j} = \left(f'_{x_i}\right)'_{x_j} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

El lector ya habrá notado la diferencia en el orden con que aparecen las variables x_i y x_j en las dos notaciones. Reiterando el proceso se obtienen derivadas parciales de ordenes superiores al

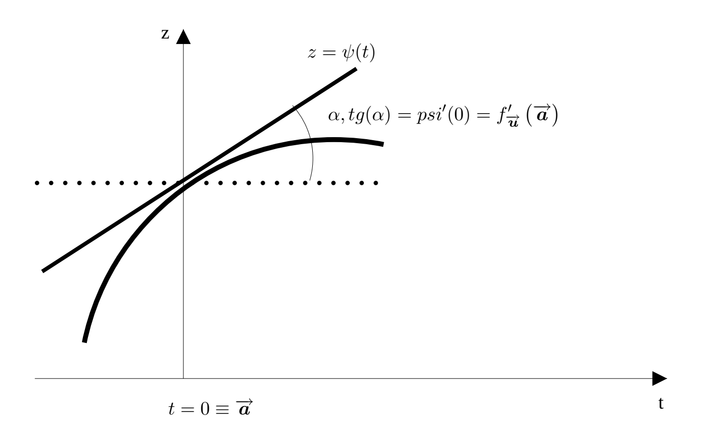


Figura 2.14: Interpretación geométrica de las derivadas (corte)

segundo. Si existe la derivada de orden n, $f^{(n)}_{x_i x_j \cdots x_k}$, podemos definir las siguientes derivadas de orden $n+1$

$$f^{(n)}_{x_i x_j \cdots x_k} \Rightarrow \left(f^{(n)}_{x_i x_j \cdots x_k}\right)'_{x_l} = f^{(n+1)}_{x_i x_j \cdots x_k x_l},$$

o bien

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_k \cdots \partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_k \cdots \partial x_j \partial x_i}\right) = \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x_l \partial x_k \cdots \partial x_j \partial x_i}.$$

Ejemplo 2.16

Calculemos como aplicación de las definiciones anteriores las derivadas parciales de orden dos de la función $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Según las reglas de derivación habituales tenemos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y,$$

y por tanto las derivadas de orden dos serán

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} &= 6x + 2y^3, & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= 6xy^2, \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} &= 6xy^2, & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} &= 6x^2y - 4. \end{aligned}$$

El hecho de que en el ejemplo precedente se verifique la igualdad $f^{(2)}_{xy}(x,y) = f^{(2)}_{yx}(x,y)$ no es una simple coincidencia; en la práctica las derivadas parciales cruzadas o mixtas $f^{(2)}_{xy}$ y $f^{(2)}_{yx}$ son iguales para buena parte de las funciones que podemos encontrar. Antes de enunciar el teorema que establece las condiciones bajo las cuales se cumple la igualdad de las derivadas

cruzadas debemos introducir los siguiente conceptos:

Definición 2.17 (Funciones de clase C^r)

Si f es continua en $\overrightarrow{x}_0$ se dice que es de clase C^0 en $\overrightarrow{x}_0$. Análogamente, si todas las derivadas parciales de f hasta orden r están definidas cerca de $\overrightarrow{x}_0$ y son continuas en $\overrightarrow{x}_0$, decimos que f es de clase C^r en $\overrightarrow{x}_0$.

Por extensión, si f es continua en D se dice que es de clase C^0 en D. Si existen todas las derivadas parciales de f hasta orden r y son contínuas en $\mathring{D}$, decimos que f es de clase C^r en D.

Teorema 2.5 (Teorema de Clairaut)

Sea $f(x, y)$ una función de clase C^2 en (x_0, y_0); se verifica entonces que

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}.$$

Análogamente, si $f(x, y)$ es de clase C^2 en el interior de su dominio de definición D se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \forall (x, y) \in \mathring{D}.$$

El recíproco no es cierto, es decir, la igualdad de las derivadas cruzadas no implíca que la función sea de clase C^2.

Ejemplo 2.17

Para verificar la falsedad del recíproco de este teorema consideremos la función definida a trozos

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}(1/y), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

y calculemos todas sus derivadas parciales hasta orden dos.

Como ya hemos comentado previamente los puntos $y = 0$, donde la definición de la función difiere de la de los puntos adyacentes, son un caso especial que requiere tratamiento aparte.

$\boxed{y \neq 0.}$ Es fácil comprobar que las reglas de derivación dan lugar a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= y^2 \operatorname{sen}(1/y), & f'_y(x, y) &= 2yx \operatorname{sen}(1/y) - x\cos(1/y), \\ f''_{xy}(x, y) &= 2y \operatorname{sen}(1/y) - \cos(1/y), & f''_{yx}(x, y) &= 2y \operatorname{sen}(1/y) - \cos(1/y). \end{aligned}$$

La igualdad de las derivadas cruzadas es debida en este caso a que la función es de clase C^2. En efecto, cuando $y \neq 0$ todas las derivadas hasta orden dos son continuas ya que se obtienen como suma, producto y composición de funciones continuas.

$\boxed{y = 0.}$ Aplicando la definición de derivada parcial obtenemos

$$f'_x(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, 0) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$f'_y(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{xh^2 \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = 0.$$

Derivando de nuevo para obtener las derivadas de orden dos resulta

$$f''_{xy}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x,h) - f'_x(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = 0,$$
$$f''_{yx}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(x+h,0) - f'_y(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Por lo tanto las derivadas cruzadas también son iguales cuando $y = 0$, y sin embargo no son continuas; comprobémoslo en el caso particular en que $x = y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f''_{xy}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (2y \operatorname{sen}(1/y) - \cos(1/y)) \neq 0.$$

EL teorema de Clairaut se generaliza sin gran dificultad al caso de funciones en $\mathbb{R}^q$. El teorema generalizado se enuncia como

Teorema 2.6

Si $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^r en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$, entonces el valor de las derivadas parciales de orden r en $\vec{x}_0$

$$\frac{\partial^r f(\vec{x}_0)}{\partial x_k \cdots \partial x_j \partial x_i},$$

no depende del orden en que se eligen las r variables $x_k, \ldots, x_j, x_i$. La propiedad recíproca no es cierta.

S 2.A Representación de superficies cuádricas

Como ya hemos comentado las ecuaciones asociadas a funciones continuas de tres variables definen en general una superficie en el espacio. En este suplemento estudiaremos de forma sistemática las superficies asociadas a las ecuaciones de segundo grado.

Definición 2.18 (Superficie cuádrica)

Una superficie cuádrica es la gráfica asociada a una ecuación de segundo grado en las variables (x, y, z), ó (x_1, x_2, x_3), es decir

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j + \sum_i d_i x_i + e = 0,$$

con c_{ij}, d_i y e cantidades reales.

Mediante rotaciones y traslaciones, la ecuación anterior puede reducirse a

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + s_1 \left(\frac{y}{b}\right)^2 + s_2 \left(\frac{z}{c}\right)^n = k,$$

donde a, b, c son números reales positivos, $n = 1$ ó 2, $k = 0$ ó 1 y $s_1, s_2 = \pm 1$.[3] Para caracterizar estas superficies como la gráfica de una función , $z = f(x, y)$, son necesarias dos funciones escalares. En efecto, si $n = 2$

$$z = \pm c \sqrt{s_2 \left(k - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - s_1 \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)},$$

mientras que

$$z = s_2 c \left(k - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - s_1 \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right),$$

cuando $n = 1$.

2.A.a Elipsoide

Una de las superficies cuádricas más habituales es la esfera, de la que el elipsoide definido por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

es una generalización inmediata. En general seguiremos un procedimiento estándar para representar gráficamente estas superficies: determinaremos los cortes de la superficie con los ejes coordenados, obtendremos las expresiones de curvas de nivel y secciones, y finalmente estudiaremos la acotación (o falta de ella) de la superficie.

Intersección con los ejes

Los puntos de corte con los ejes coordenados de una superficie $\zeta(x, y, z) = 0$ se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$\begin{array}{lrcl} \text{Corte con el eje X,} & \zeta(x,0,0) & = & 0, \\ \text{Corte con el eje Y,} & \zeta(0,y,0) & = & 0, \\ \text{Corte con el eje Z,} & \zeta(0,0,z) & = & 0, \end{array}$$

que en el caso del elipsoide dan lugar a los seis puntos siguientes $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Estos puntos se denominan vértices del elipsoide.

Curvas de nivel

Las curvas de nivel se obtienen al imponer que z tome un valor constante; así

$$z = d \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{d^2}{c^2},$$

y teniendo en cuenta que el miembro de la izquierda es una suma de cuadrados se deduce que $|d| \le c$, es decir, que no existen curvas de nivel si $z < -c$ o si $z > c$. Introduciendo la función $\zeta(d, u) = \sqrt{|1 - d^2/u^2|}$ las ecuaciones de las curvas de nivel vienen dadas por

$$\left(\frac{x}{a\zeta(d,c)}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\zeta(d,c)}\right)^2 = 1, \ |d| < c,$$

es decir, se trata de elipses con semiejes $a\zeta(d, c)$ y $b\zeta(d, c)$. Si $|d| = c$ la elipse queda reducida al punto $(x, y) = (0, 0)$.

[3] Se excluyen cuádricas degeneradas, tales como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + 1 = 0, \quad \text{ó} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0.$$

La primera es el conjunto vacio y la segunda define únicamente el origen de coordenadas.

Secciones

Se obtienen de forma análoga imponiendo que x ó y tomen un valor constante.

$$x = d \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{d^2}{a^2}.$$

Como el miembro de la izquierda es una suma de cuadrados concluimos otra vez que $|d| \leq a$, o lo que es lo mismo, no existen secciones verticales si $x \notin [-a, a]$. Utilizando de nuevo la función ζ las ecuaciones de las secciones $x = d$ son

$$\left(\frac{y}{b\zeta(d,a)}\right)^2 + \left(\frac{z}{c\zeta(d,a)}\right)^2 = 1,\ |d| < a,$$

por lo que también se trata de elipses (o del punto $(y, z) = (0, 0)$ si $|d| = a$). Dejamos como ejercicio que el lector establezca que las secciones $y = d$ son elipses con semiejes $a\zeta(d, b)$ y $b\zeta(d, b)$.

De todos estos resultados se deduce que el elipsoide es una superficie acotada, ya que se encuentra inscrita en el paralelepípedo $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ y $|z| \leq c$, centrada en el origen y simétrica con respecto a los planos coordenados.

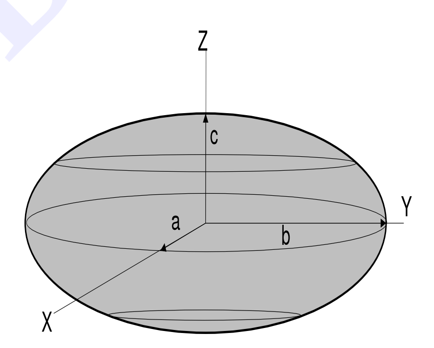
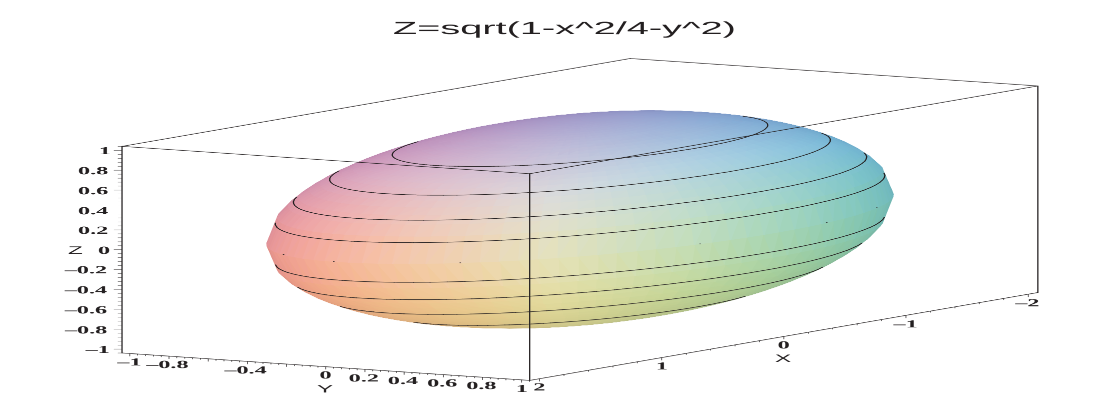
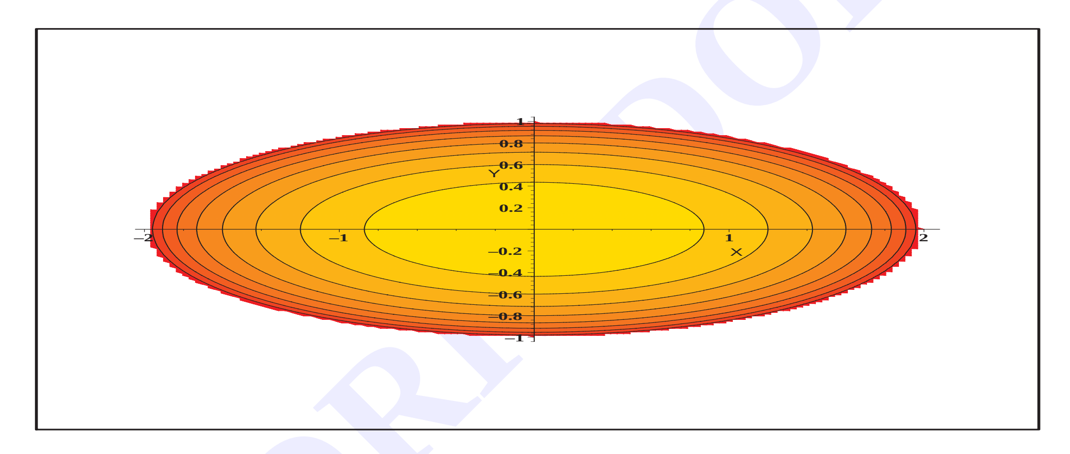


Figura 2.15: Elipsoide

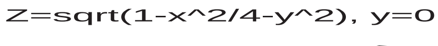
El aspecto general de la superficie es el que se muestra en la figura esquemática de la página precedente. A continuación mostramos la gráfica, algunas curvas de nivel y la sección $y = 0$ del elipsoide de ecuación $x^2/4 + y^2 + z^2 = 1$, elaborados con MAPLE.

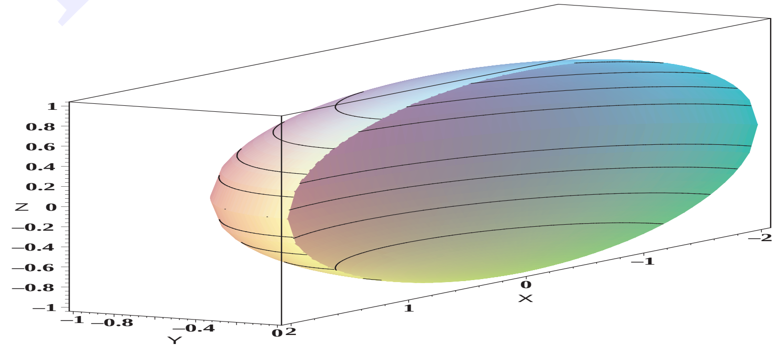


Elipsoide de ecuación $x^2/4 + y^2 + z^2 = 1$.



Curvas de nivel.





Sección $y = 0$.

2.A.b Hiperboloide de una hoja

La superfice llamada hiperboloide de una hoja (llamda así por razones que se harán evidentes más adelante) está definida por la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2-\left(\frac{z}{c}\right)^2=1.$$

Siguiendo el procedimiento que hemos establecido para graficar estas superficies tenemos:

Intersección con los ejes

Estas superficies no presentan puntos de corte con el eje Z y los puntos de intersección con los ejes X e Y son $(\pm a,0,0)$ y $(0,\pm b,0)$, respectivamente.

Curvas de nivel

Imponiendo que la coordenada z tome un valor constante resulta

$$z=d\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{d^2}{c^2}.$$

Dado que los dos miembros de la ecuación son siempre positivos no podemos imponer ninguna restricción sobre la constante d lo que nos permite asegurar que existen curvas de nivel cualquiera que sea el valor de z. Definiendo $\xi(d,u)=\sqrt{1+d^2/u^2}$, deducimos que las curvas de nivel son elipses de ecuación

$$\left(\frac{x}{a\xi(d,c)}\right)^2+\left(\frac{y}{b\xi(d,c)}\right)^2=1,\ \forall\, d.$$

Secciones

Nos limitaremos a estudiar las secciones con planos $x=d$, dejando las que corresponden a intersecciones con planos $y=d$ como ejercicio para el lector.

$$x=d\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{d^2}{a^2}.$$

Tampoco existe restricción alguna sobre los valores de d en esta caso. Debemos distinguir tres situaciones según los valores de d. Si $|d|<a$, obtenemos

$$\left(\frac{y}{b\zeta(d,a)}\right)^2-\left(\frac{z}{c\zeta(d,a)}\right)^2=1,$$

que es la ecuación de una hipérbola que corta al eje Y en los puntos $y=\pm b\zeta(d,a)$; en particular si $d=0$ los puntos de corte son $y=\pm b$. Por el contrario, si $|d|>a$ la expresión precedente se reescribe como

$$\left(\frac{z}{c\zeta(d,a)}\right)^2-\left(\frac{y}{b\zeta(d,a)}\right)^2=1,$$

que es la ecuación de una hipérbola que corta al eje Z en $z=\pm c\zeta(d,a)$; cuando $d=0$ tenemos $z=\pm c$ simplemente. Finalmente, si $|d|=a$, las hipérbolas se reducen a dos rectas con ecuaciones

$$\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0.$$

La superficie no se encuentra acotada: las curvas de nivel, que existen para culaquier valor de z, son elipses cuyos semiejes son funciones crecientes de $|z|$. El aspecto general de esta superficie puede observarse en el siguiente esquema

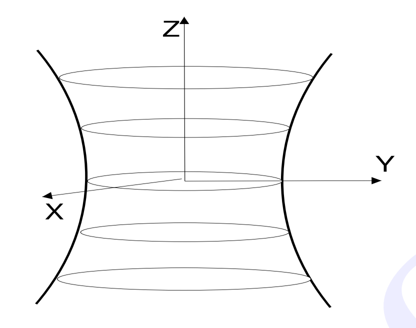
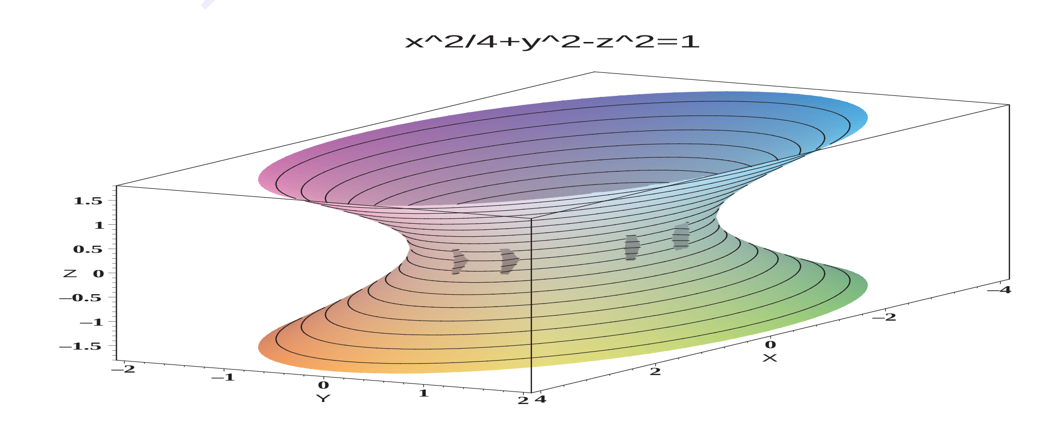
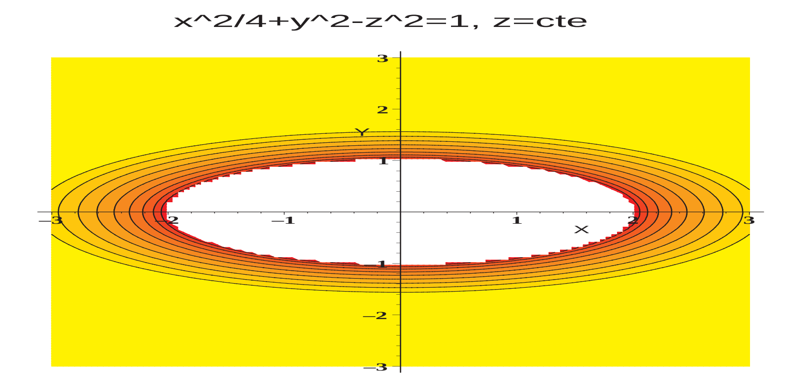


Figura 2.16: Hiperboloide de una hoja

que muestra que la superficie está centrada en el origen y es simétrica con respecto a los planos coordenados. Las tres figuras siguientes fueron realizadas con MAPLE y representan de forma más precisa la gráfica, las curvas de nivel y la sección $y = 0$ del hiperboloide de ecuación $x^2/4 + y^2 - z^2 = 1$,

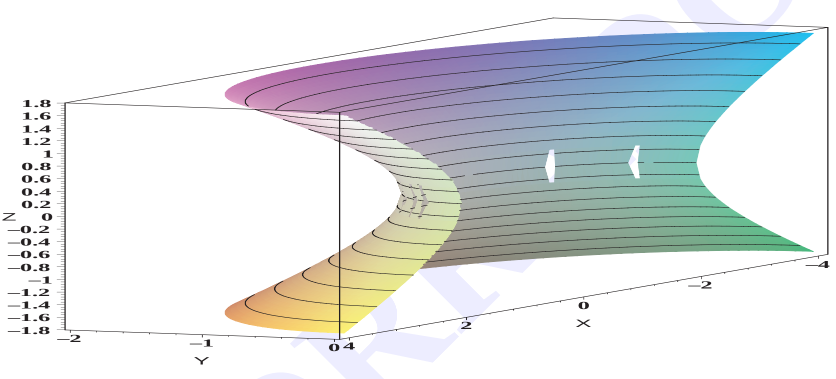


Hiperboloide de ecuación $x^2/4 + y^2 - z^2 = 1$.



Curvas de nivel.





Sección $y = 0$.

2.A.c Hiperboloide de dos hojas

Esta superficie está definida por la ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1,$$

donde a, b y c son cantidades reales positivas.

Cortes con los ejes

La superficie corta al eje Z en los puntos $(0, 0, \pm c)$, pero no existen puntos de corte con los ejes X e Y lo que sugiere que la superficie no corta o no toca el plano XY. Para demostrar esta aseveración efectuamos la substitución $z = 0$ en la ecuación del hiperboloide de manera que obtenemos

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = -1,$$

ecuación que no admite soluciones reales para x e y.

Curvas de nivel

Al substituir $z = d$ en la ecuación de la superficie obtenemos

$$z = d \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2} - 1.$$

Como el miembro de la izquierda es no negativo debe cumplirse que $d^2/c^2 - 1 \geq 0$, o lo que es lo mismo, $|d| \geq c$. Esto implica: a) que no existe superficie dentro de la región comprendida entre los planos $z = -c$ y $z = c$, y b) que la superficie no está acotada. Utilizando la notación habitual $\zeta(d, c) = \sqrt{d^2/c^2 - 1}$ las curvas de nivel se escriben

$$\left(\frac{x}{a\zeta(d,c)}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\zeta(d,c)}\right)^2 = 1, \; |d| > c.$$

Por lo tanto, la curvas de nivel son elipses con semiejes $a\zeta(d, c)$ y $b\zeta(d, c)$.

Secciones

Exigiendo ahora que x tome un valor constante, resulta

$$x = d \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{d^2}{a^2},$$

ecuación que muestra otra vez que la superficie no corta al plano XY. En efecto, el valor más pequeño que puede tomar $|z|$ corresponde a $d = 0$ y es

$$|z|_{min} = c\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \geq c.$$

El menor de estos valores $|z|_{min} = c$ se obtiene cuando $y = 0$. Con la definición de la función ξ la ecuación de las secciones se escribe como

$$\left(\frac{z}{c\xi(d,a)}\right)^2 - \left(\frac{y}{b\xi(d,a)}\right)^2 = 1,$$

expresión que define una hipérbola que corta al eje Z en los puntos $z = \pm c\xi(d, a)$.

El aspecto cualitativo de este tipo de superficies se muestra en la siguiente figura

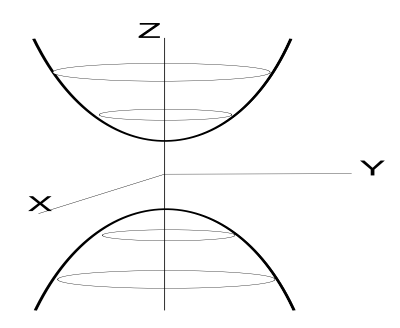
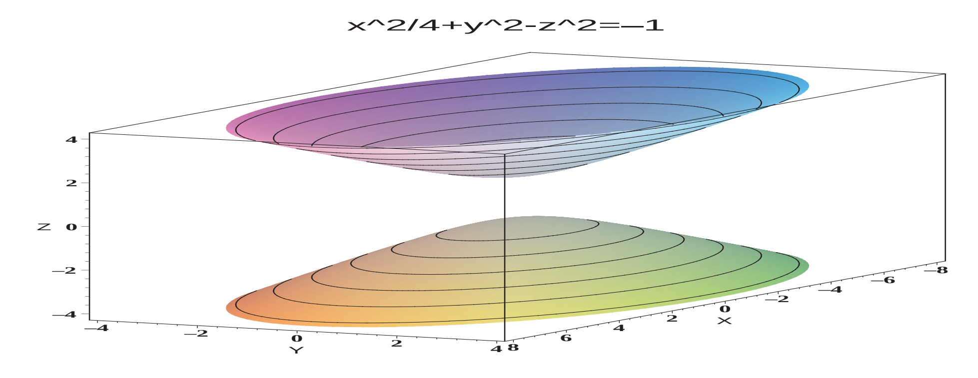


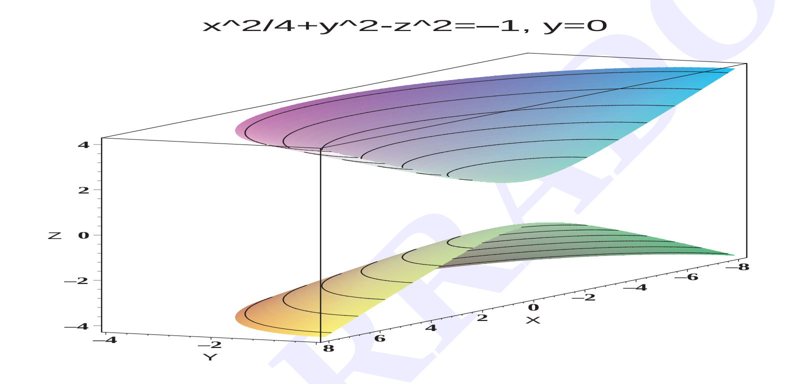
Figura 2.17: Hiperboloide de dos hojas

Ésta junto con la figura 2.16 explican el porqué de los nombres «hiperboloides de una y dos hojas». Se observa claramente que la superficie no está acotada y que posee simetría de reflexión con respecto a los planos coordenados.

La gráfica y la sección $y = 0$ del hiperboloide $x^2/4 + y^2 + z^2 = -1$, obtenidas con MAPLE, se muestran en las dos figuras siguientes



Hiperboloide de ecuación $x^2/4 + y^2 - z^2 = -1$.



Sección $y = 0$.

2.A.d El Cono

La ecuación que caracteriza un cono viene dada por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0,$$

donde, como en los casos precedentes, las tres constantes a, b y c son positivas.

Intersección con los ejes

Las intersecciones con los ejes ocurren simultáneamente en el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$, de manera que podemos afirmar la superficie converge de alguna forma en dicho punto.

Curvas de nivel

Exigiendo que $z = d$ tenemos

$$z = d \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2},$$

y definiendo $\gamma(d,u) = d/u$ para $u \neq 0$ podemos reescribir esta ecuación como

$$\left(\frac{x}{a\gamma(d,c)}\right)^2 + \left(\frac{y}{b\gamma(d,c)}\right)^2 = 1,\ d \neq 0.$$

Así, las curvas de nivel son elipses con centro en el origen de coordenadas, con ejes de simetría X e Y, y con semiejes $a\gamma(d,c)$ y $b\gamma(d,c)$. Cuando $d = 0$ la curva de nivel se reduce al origen de coordenadas.

Secciones

Las ecuaciones que determinan los cortes con planos verticales $x = d$ son

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \gamma(d,a)^2,$$

es decir, son hipérbolas cuyas ramas cortan al eje Z en los puntos $z = \pm c\gamma(d,a)$. Cuando consideramos la sección con el plano $x = 0$ las dos ramas de la hipérbola se reducen a las rectas

$$z = \pm\frac{c}{b}y.$$

Se deja como ejercicio para el lector la obtención de las expresiones correspondientes a las secciones con planos $y = d$. Al reunir los diversos resultados obtenidos hasta ahora, surge el aspecto genérico de un cono tal como se muestra en este esquema

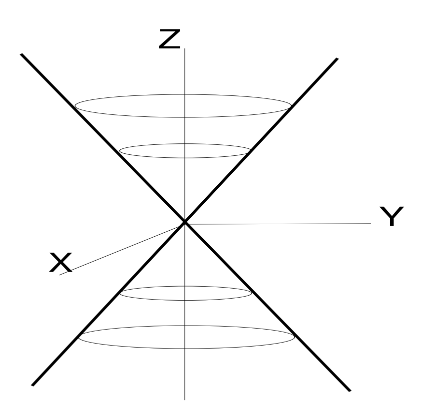
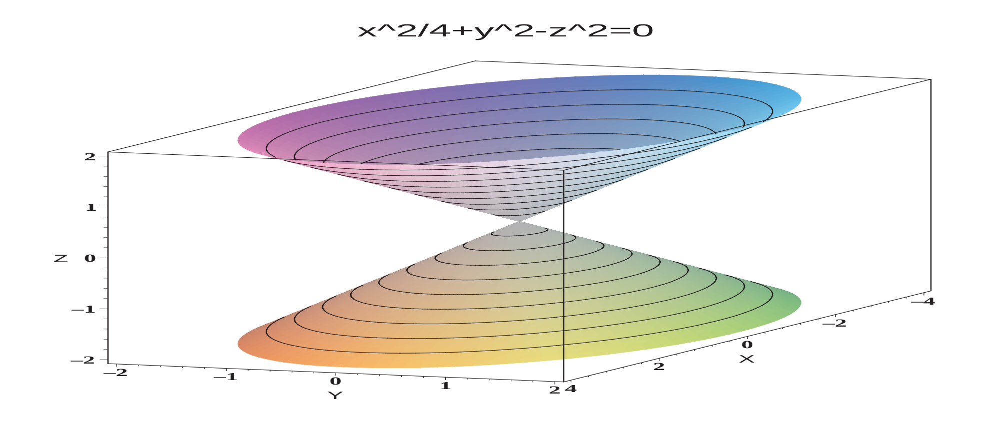
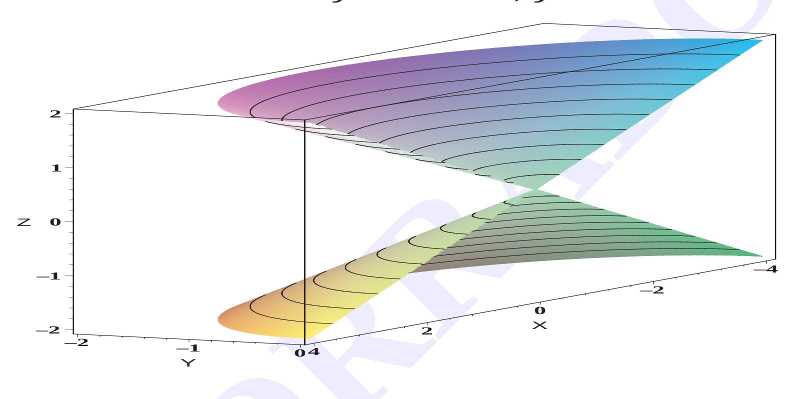


Figura 2.18: Cono

que pone de manifiesto la simetría especular de la superficie con respecto a los planos coordenados y el hecho de que no está acotada. Las dos figuras siguientes muestran de una forma más precisa la gráfica y la sección $y = 0$ del cono de ecuación $x^2/4 + y^2 - z^2 = 0$



Cono de ecuación $x^2/4 + y^2 - z^2 = 0$.



Sección $y = 0$.

2.A.e El paraboloide elíptico

Finalizamos esta sección dedicada a la representación gráfica de las superficies cuádricas con el estudio de los dos tipos de paraboloides. Abordaremos primero la representación de los paraboloides elípticos definidos por

$$\left(\frac{x}{\tilde{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\tilde{b}}\right)^2 - \frac{z}{c} = 0,$$

donde $\tilde{a}, \tilde{b}$ y c son cantidades positivas. Multiplicando ámbos miembros por c y definiendo $a = \tilde{a}/\sqrt{c}$, y $b = \tilde{b}/\sqrt{c}$, resulta

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z = 0.$$

A diferencia de las cuádricas que hemos estudiado hasta ahora, es posible caracterizar esta superficie mediante una sóla función escalar

$$z\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

La forma de la función revela que los valores de z son necesariamente positivos o cero; por lo tanto la superficie está restringida al hemiespacio superior.

Cortes con los ejes

La superficie corta a los tres ejes en el origen de coordenadas; de hecho como $z \geq 0$ sobre la superficie, ésta toca el plano XY en dicho punto.

Curvas de nivel

Es muy fácil deducir que las curvas de nivel son elipses con centro en el origen y semiejes con longitudes $a\sqrt{d}$ y $b\sqrt{d}$, situados sobre los ejes coordenados. En efecto, imponiendo que $z = d$ resulta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=d.$$

Como el miembro izquierdo es positivo o cero concluimos que $d \geq 0$. No existe ninguna otra restricción sobre la constante d, con lo cual podemos afirmar que el hiperboloide no está acotado.

Secciones

Por lo que a las secciones con planos verticales $x = d$ o $y = d$ se refiere, tenemos:

$$\begin{aligned} x = d \Rightarrow \quad z &= \frac{y^2}{b^2}+\frac{d^2}{a^2}, \\ y = d \Rightarrow \quad z &= \frac{x^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Se trata en ámbos casos de parábolas verticales que cortan al eje Z en los puntos $z = \gamma(d,a)^2$ y $z = \gamma(d,b)^2$ respectivamente. Utilizando toda esta información podemos elaborar el esquema que se muestra a continuación

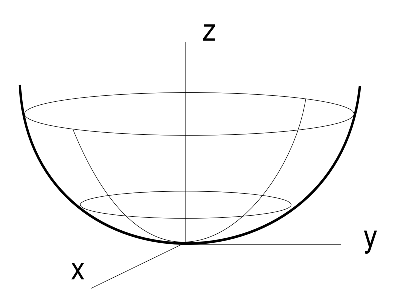
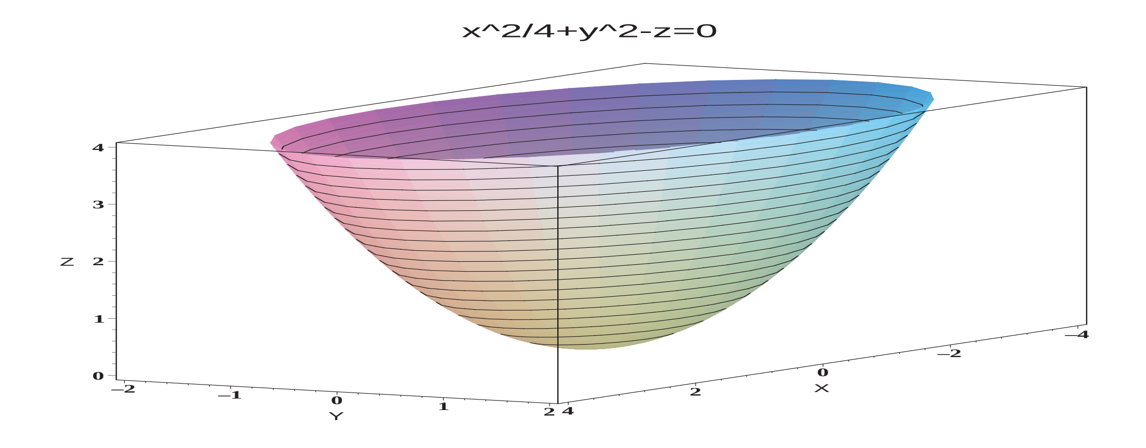
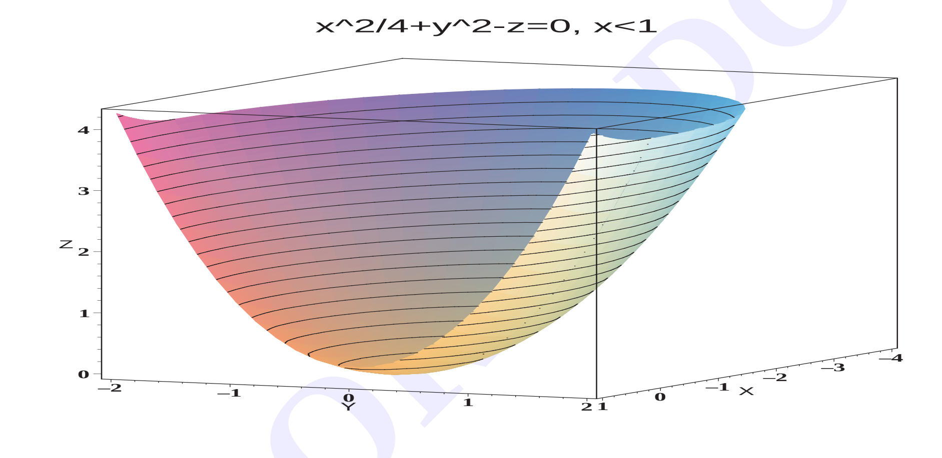


Figura 2.19: Paraboloide elíptico

Resulta evidente que la superficie no está acotada y también su simetría especular con respecto a los dos planos $x = 0$ e $y = 0$. Las dos figuras que se muestran a continuación representan la gráfica y la sección $y = 0$ del paraboloide elíptico de ecuación $x^2/4 + y^2 - z = 0$.



Paraboloide elíptico de ecuación $x^2/4 + y^2 - z = 0$.



Sección $y = 0$.

2.A.f El paraboloide hiperbólico

Los paraboloides de tipo hiperbólico son la gráfica de una función de la forma

$$z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

definida en todo $\mathbb{R}^2$. Utilizamos los pasos habituales para obtener la gráfica aproximada de la función.

Cortes con los ejes

La superficie corta a los tres ejes en el origen de coordenadas; la diferencia con respecto a los hiperboloides de tipo elíptico es que z puede tomar valores positivos y negativos, es decir, la superficie corta el plano XY en dicho punto en vez de ser tangente al mismo.

Curvas de nivel

Procedemos de la forma habitual y substituimos $z = d$ en la ecuación de la superficie

$$z = d \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = d,$$

y separando la expresión en dos según el signo de la constante d resulta

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= d, \quad d > 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} &= |d|, \quad d < 0. \end{aligned}$$

En el primer caso estamos ante hipérbolas que cortan al eje X en los puntos $x = \pm a\sqrt{d}$, mientras que en el segundo las ramas de las hipérbolas cortan al eje Y en $y = \pm b\sqrt{|d|}$. En ninguno de los dos casos existe restricción sobre d: puede tomar valores arbitrariamente grandes o pequeños, de manera que la superficie no está acotada.

Secciones

Las expresiones definitorias de las secciones correspondientes a planos $x = d$ e $y = d$ son

$$\begin{aligned} x = d \Rightarrow \quad z &= -\frac{y^2}{b^2} + \frac{d^2}{a^2}, \\ y = d \Rightarrow \quad z &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{d^2}{b^2}, \end{aligned}$$

Se trata de parábolas verticales; el punto de corte con el eje Z es $z = \gamma(d, a)^2$ para planos $x = d$, y $z = -\gamma(d, b)^2$ cuando los planos son del tipo $y = d$.

Utilizando estas expresiones para realizar una representación gráfica cualitativa deducimos que los hiperboloides hiperbólicos presentan el siguiente aspecto

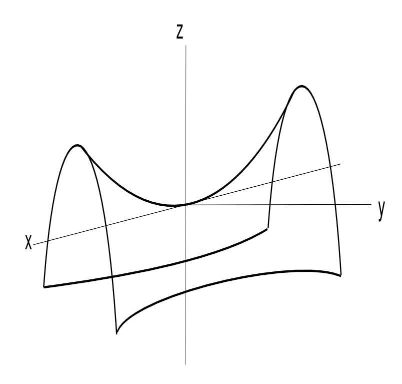
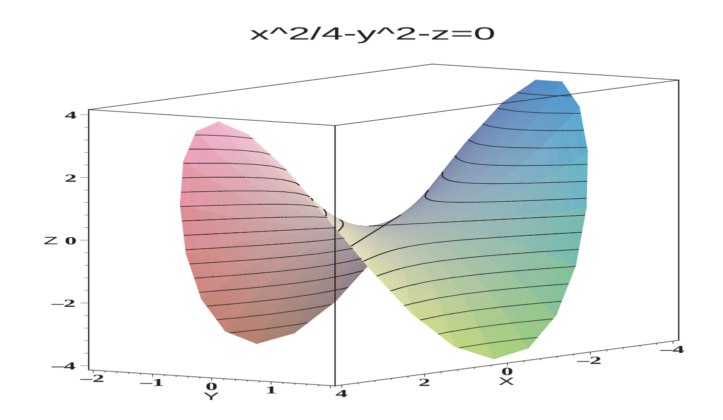
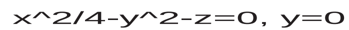


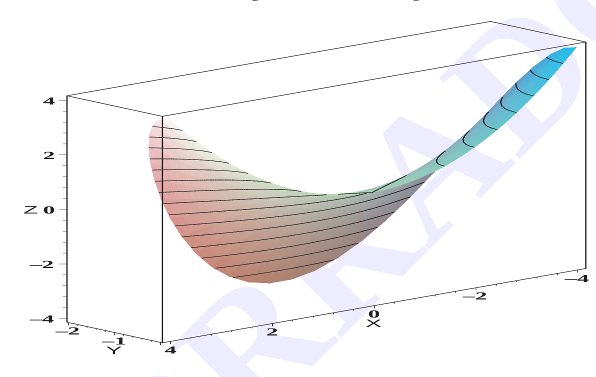
Figura 2.20: Paraboloide hiperbólico

donde se aprecia que la superficie no está acotada y su simetría especular con respecto a los planos $x = 0$ e $y = 0$. Por último mostramos en tres figuras, realizadas con MAPLE, la gráfica y las secciones $x = 0$ e $y = 0$ del paraboloide hiperbólico de ecuación $x^2/4 - y^2 - z = 0$.

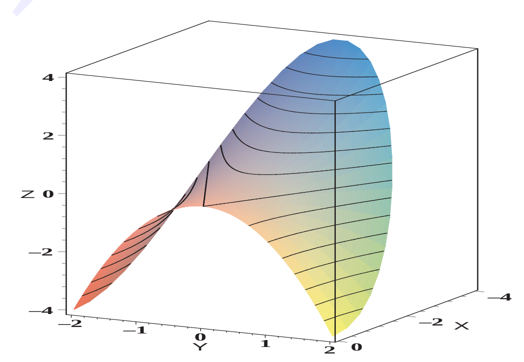


Hiperboloide hiperbólico de ecuación $x^2/4 - y^2 - z = 0$.





Sección $x = 0$.



Sección $y = 0$.

S 2.B Caracterización de regiones delimitadas por superficies cuádricas

Nos centramos a continuación en la caracterización simple de algunos dominios de $\mathbb{R}^3$ limitados por algunas de las superficies cuádricas que acabamos de estudiar.

Ejemplo 2.18

Parametrizaremos la región sólida Ω limitada lateralmente por el hiperboloide de una hoja $(x^2 + y^2)/4 - z^2 = 1$ y horizontalmente por los planos $z = \pm 2$. La región Ω se dibuja de manera esquemática en la siguiente figura.

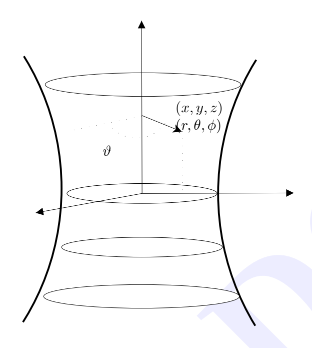


Figura 2.21: Parametrización del hiperboloide de una hoja

La propia definición de la región impone que la coordenada z sólo puede tomar valores en el intervalo $[-2, 2]$. De la figura se deduce que, para un valor de z dado, las coordenadas x e y están constreñidas por el disco cuya frontera es la curva de nivel de valor constante z.

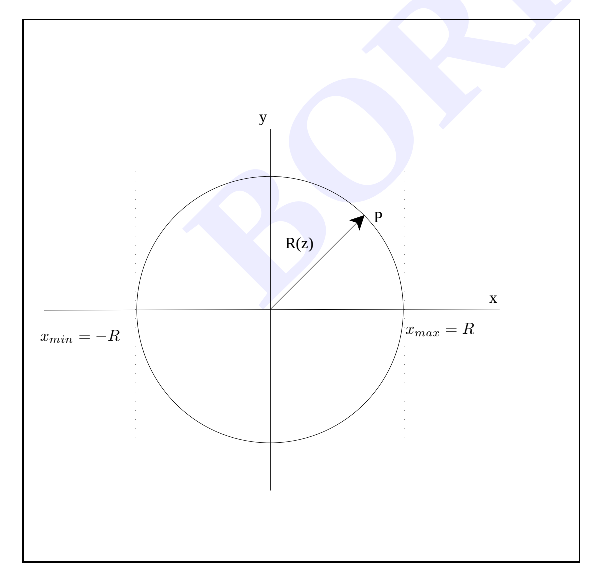


Figura 2.22: Corte horizontal del hiperboloide de una hoja

Ahora bien, hemos visto que las curvas de nivel de un hiperboloide de ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

son elipses con semiejes $a\sqrt{1 + z^2/c^2}$ y $b\sqrt{1 + z^2/c^2}$. Como en este caso $a = b = 2$ las curvas de nivel son circunferencias de radio

$$R(z) = 2\sqrt{1 + z^2}.$$

Por otro lado sabemos que una caracterización simple del disco de radio $R(z)$ centrado en el origen es

$$x \in [-R(z), R(z)], \quad y \in \left[-\sqrt{R(z)^2 - x^2}, \sqrt{R(z)^2 - x^2}\right],$$

de manera que la caracterización simple en coordenadas cartesianas de la región Ω se puede escribir como

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\backslash.\; \begin{bmatrix} z \in [-2, 2] \\ x \in [-R(z), R(z)] \\ y \in \left[-\sqrt{R(z)^2 - x^2}, \sqrt{R(z)^2 - x^2}\right] \end{bmatrix} \right\}.$$

La parametrización en coordenadas cilíndricas se obtiene de forma inmediata, sin más que utilizar la caracterización de un disco de radio $R(z)$ en coordenadas polares. Así, podemos escribir que

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \;\backslash.\; ; \theta \in [0, 2\pi), z \in [-2, 2], r \in [0, R(z)] \right\}.$$

Como ya se ha comentado en varias ocasiones, la caracterización de una región no es única y es posible encontrar diversas caracterizaciones y en distintos sistemas de coordenadas. En el caso que nos ocupa, el lector no encontrará dificultad en aceptar que la planta de la región Ω es un disco de radio $R(\pm 2) = 2\sqrt{5}$. Por lo tanto

$$\theta \in [0, 2\pi], \quad r \in \left[0, 2\sqrt{5}\right].$$

El problema que se plantea al adoptar este punto de vista es que los valores de z están restringidos de forma complicada por los valores de r. Utilizando la figura deducimos

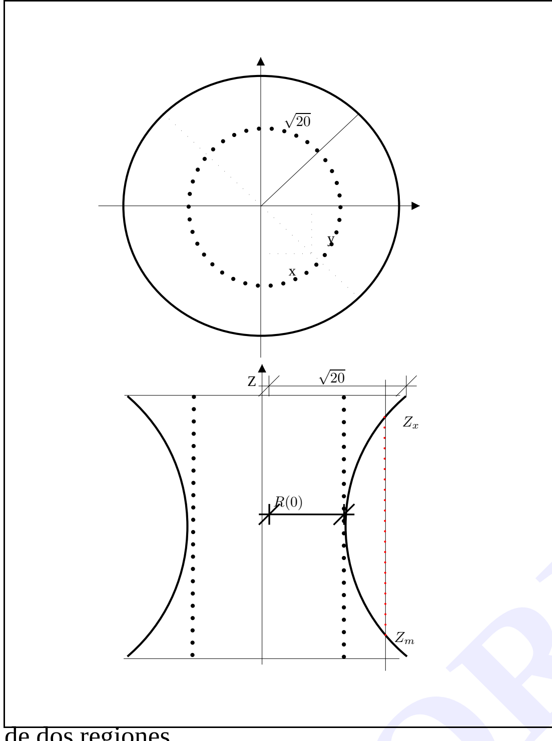


Figura 2.23: Parametrización alternativa.

que dentro del cilíndro interior de radio $R(0) = 2$ la coordenada z varía libremente dentro del intervalo $[-2, 2]$. Sin embargo, cuando $2 < r \leq 2\sqrt{5}$, existen dos valores límite z_m y z_x tales que

$$z \in [-2, z_m] \cup [z_x, 2].$$

Fijándonos de nuevo en la figura, observamos que estos dos valores de z corresponden a puntos del hiperboloide, cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{r^2}{4} - z^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} z_x &= \sqrt{\frac{r^2}{4} - 1}, \\ z_m &= -\sqrt{\frac{r^2}{4} - 1}. \end{cases}$$

Es evidente que cuando $r < 2$ la ecuación no admite soluciones y por tanto no resulta posible definir z_m y z_x. Cuando $r = 2$ se cumple que $z_m = z_x = 0$ y en consecuencia $z \in [-2, 2]$. En definitiva, podemos caracterizar Ω como la unión de dos regiones

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \setminus. \begin{bmatrix} \theta \in [0, 2\pi) \\ z \in [-2, 2] \\ r \in [0, 2] \end{bmatrix} \right\} \cup \left\{ (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \setminus. \begin{bmatrix} \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in \left(2, 2\sqrt{5}\right] \\ z \in [-2, z_m] \cup [z_x, 2] \end{bmatrix} \right\}$$

Ejemplo 2.19

Abordamos ahora el estudio de la región sólida Ω limitada lateralmente por el paraboloide de ecuación $z = (x^2 + y^2)/4$ y superiormente por el plano z=4.

Como resultado obvio de la definición de Ω imponemos que $z \in [0, 4]$. Para un valor

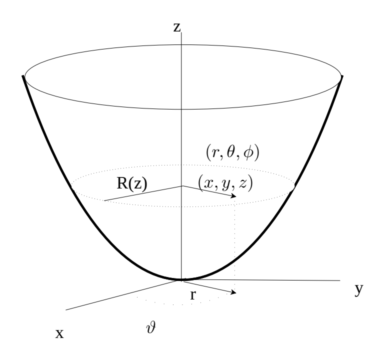


Figura 2.24: Caracterización de un paraboloide

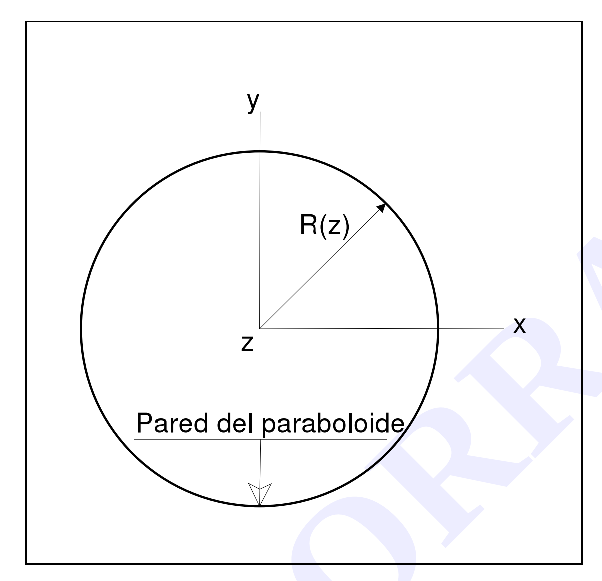


Figura 2.25: Corte horizontal en un paraboloide

fijo de z, las otras coordenadas tomarán valores tales que $x^2 + y^2 \leq R(z)^2$, donde $R(z)$ es el radio de la curva de nivel de valor constante z. Su expresión se deduce trivialmente de la ecuación del paraboloide

$$z = \frac{x+y}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4z$$
$$\Rightarrow R(z) = 2\sqrt{z}.$$

Es decir, las curvas de nivel son circunferencias de radio $R(z) = 2\sqrt{z}$. Por lo tanto las coordenadas x e y pueden tomar cualquier valor dentro del disco cerrado limitado por dicha circunferencia. Así, para z dado

$$x \in \left[-2\sqrt{z}, 2\sqrt{z}\right], \quad y \in \left[-\sqrt{4z - x^2}, \sqrt{4z - x^2}\right],$$

de manera que la caracterización simple de la región es

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash . \ \left[\begin{array}{c} z \in [0, 4] \\ x \in [-2\sqrt{z}, 2\sqrt{z}] \\ y \in [-\sqrt{4z - x^2}, \sqrt{4z - x^2}] \end{array} \right] \right\}.$$

La caracterización en coordenadas cilíndricas es aún más sencilla. Una vez conocido el intervalo de variación de la coordenada z y sabiendo que las curvas de nivel son circunferencias de radio $R(z)$, podemos escribir

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash . \ \left[\begin{array}{c} z \in [0, 4] \\ \theta \in [0, 2\pi) \\ r \in [0, 2\sqrt{z}] \end{array} \right] \right\}.$$

Una forma alternativa de caracterizar Ω consiste en delimitar los límites de máxima variación de x e y, y determinar los valores permitidos de z en función de los que tomen x e y en cada caso. Con este objetivo consideramos la planta de Ω en el plano XY. Ésta se confunde con la «tapa superior» de la región, que es el disco de ecuación $x^2 + y^2 \leq 16$. Si permitimos que x e y varíen dentro del mismo, tenemos

$$x \in [-4, 4], \quad y \in \left[\sqrt{16 - x^2}, \sqrt{16 - x^2}\right].$$

Ahora debemos obtener el intervalo de valores permitidos de z; considerando una sección vertical cualquiera, apreciamos que $z \in [z_s, 4]$, donde z_s qcorresponde a un punto (x, y, z_s) situado sobre el paraboloide. Por lo tanto:

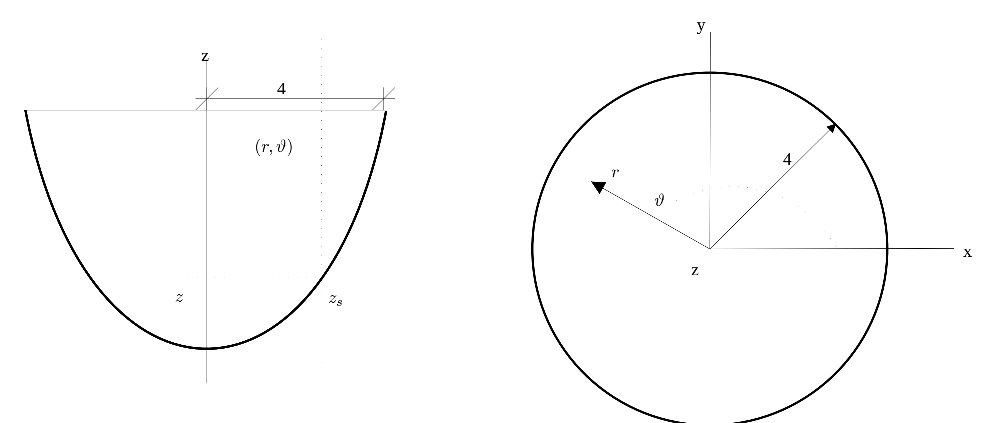


Figura 2.26: Parametrización de un paraboloide en cilíndricas

$$z_s = \frac{x^2+y^2}{4},$$

y en consecuencia $z \in \left[(x^2+y^2)/4, 4\right]$. Así, la nueva caracterización simple en coordenadas cartesianas viene dada por

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \ \left[\begin{array}{c} x \in [-4,4] \\ y \in \left[-\sqrt{16-x}, \sqrt{16-x}\right] \\ z \in \left[(x^2+y^2)/4, 4\right] \end{array} \right] \right\},$$

y de forma análoga tenemos

$$\Omega = \left\{ (r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ \backslash. \ \left[\begin{array}{c} \theta \in [0,2\pi) \\ r \in [0,4] \\ z \in \left[r^2/4, 4\right] \end{array} \right] \right\},$$

en coordenadas cilíndricas.



S 2.C Algunos trucos para el cálculo de límites

2.C.a Límites de funciones racionales

Como se indica en el título abordamos el estudio de límites de funciones de la forma

$$f(x,y) = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son polinomios en la variables x e y. Si el denominador no se anula «cerca» de (x_0,y_0) las propiedades de los límites establecen que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} = \frac{Q(x_0,y_0)}{P(x_0,y_0)}.$$

Si, por el contrario, $P(x_0,y_0) = 0$ no podemos aplicar la propiedad correspondiente al cociente de dos funciones y el cálulo deviene mucho más complicado. No obstante, existen circunstancias que nos permiten descartar de inmediato la existencia del límite, como por ejemplo:

1. Existe una curva $y = \varphi(x)$, que pasa por (x_0, y_0), y tal que $P\left(x, \varphi(x)\right) = 0$.

   Basta con considerar el límite parcial

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=\varphi(x)}} \frac{Q\left(x,y\right)}{P\left(x,y\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{Q\left(x,\varphi(x)\right)}{P\left(x,\varphi(x)\right)} = \infty,$$

   para descartar la existencia del límite. Por ejemplo, la función $f\left(x,y\right) = xy/(x-y)$ está definida en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en la recta $y = x$ que pasa por el origen; por lo tanto el límite parcial a lo largo de dicha recta no existe.

2. La potencia más pequeña del numerador es inferior a la menor de las potencias del denominador.

   Antes de demostrar la validez de esta afirmación supodremos que hemos reescrito los polinomios en función de las variables $\tilde{x} = x - x_0$ e $\tilde{y} = y - y_0$ de manera que cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ el par $(\tilde{x}, \tilde{y}) \to (0, 0)$. Supongamos que las potencias más pequeñas de los polinomios P y Q en las nuevas variables son r y s respectivamente, de manera que

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{x},\tilde{y}\right) &= \sum_{\substack{n,m\\ n+m=r}} \alpha_{nm}\tilde{x}^n\tilde{y}^m + \cdots, \\ Q\left(\tilde{x},\tilde{y}\right) &= \sum_{\substack{n,m\\ n+m=s}} \beta_{nm}\tilde{x}^n\tilde{y}^m + \cdots \end{aligned}$$

   Estudiemos los límites parciales a lo largo de rectas que pasan por el origen de coordenadas

$$\lim_{\substack{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)\\ \tilde{y}=\lambda\tilde{x}}} \frac{Q\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)}{P\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)} = \lim_{\tilde{x}\to 0} \frac{Q\left(\tilde{x},\lambda\tilde{x}\right)}{P\left(\tilde{x},\lambda\tilde{x}\right)} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{n,m\\ n+m=r}} \alpha_{nm}\lambda^m}{\displaystyle\sum_{\substack{n,m\\ n+m=r}} \beta_{nm}\lambda^m} \lim_{\tilde{x}\to 0} \tilde{x}^{r-s}.$$

   Si $r < s$, resulta que

$$\lim_{\substack{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)\\ \tilde{y}=\lambda\tilde{x}}} \frac{Q\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)}{P\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)} = \infty,$$

   es decir, el límite parcial no existe lo cual descarta la existencia del límite de la función cuando $\xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)}$.

3. Si la potencia más pequeña del numerador coincide con la potencia más pequeña del denominador es altamente probable que el límite tampoco exista. Si $r = s$, el límite parcial es

$$\lim_{\substack{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)\\ \tilde{y}=\lambda\tilde{x}}} \frac{Q\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)}{P\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{n,m\\ n+m=r}} \alpha_{nm}\lambda^m}{\displaystyle\sum_{\substack{n,m\\ n+m=r}} \beta_{nm}\lambda^m},$$

   que depende en general de la pendiente λ, lo que impide la existencia del límite. En aquellos casos en los que los coeficientes α del numerador y los coeficientes β del denominador coincidan el límite parcial por rectas vale la unidad independientemente del valor de λ, y por lo tanto no podemos descartar la existencia del límite.

2.C.b Cálculo de límites en coordenadas polares

En coordenadas polares el origen de coordenadas se caracteriza porque $r = 0$. Por el contrario el ángulo θ no tiene un valor bien definido. Por ello

$$(x, y) \to (0, 0) \equiv r \to 0,\ \theta = \text{indeterminado}.$$

Así, es correcto escribir que

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f\,(x, y) = \lim_{r\to 0} f\,(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,,$$

donde se admite que θ varia libremente con r. Supongamos que $f\,(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ se descompone como producto de dos funciones $\varphi(r)$ y $\psi(r, \theta)$, de forma que

$$L = \lim_{r\to 0} \varphi(r) \lim_{r\to 0} \psi(r, \theta),$$

y supongamos también que se cumple que

$$\begin{array}{lll} \lim_{r\to 0} \varphi(r) & = & 0, \\ |\psi(r, \theta)| & < & K, \end{array}$$

donde K es un número real positivo. Entonces

$$L = 0.$$

Consideremos, por ejemplo, el siguiente límite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2(y+1)+y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{2(r\cos\theta)^2(r\,\text{sen}\,\theta+1)+(r\,\text{sen}\,\theta)^2}{2(r\cos\theta)^2+(r\,\text{sen}\,\theta)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta} + \lim_{r\to 0} r\frac{\text{sen}\,\theta\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta} \\ &= 1 + \lim_{r\to 0} r \lim_{r\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta\cos^2\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta}. \end{aligned}$$

Como $2\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta > |\text{sen}\,\theta|\cos^2\theta$, cualquiera que sea el valor de θ, el segundo sumando es el producto de un factor que se anula por otro que, en valor absoluto, es menor que la unidad. Por lo tanto

$$L = 1.$$

Por el contrario, si $L = l_1 l_2(\theta)$ la dependencia en el ángulo refleja que el valor al que tiende la función depende del camino de aproximación al origen con lo cual podemos afirmar que el límite no existe. Dado, por ejemplo, el siguiente límite

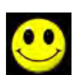
$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(y+1)+y^2}{2x^2+y^2},$$

llegamos de forma análoga a que

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta}{2\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta},$$

y como L depende de la forma de la función $\theta(r)$, concluimos que el límite no existe.

Problemas



Problema 2.1 Determine el dominio de definición y la imagen de las siguientes funciones

(a) $f : (x, y) \to \dfrac{1}{x+y}$, (b) $f : (x, y) \to \dfrac{1}{x^2+2y^2}$,

(c) $f : (x, y) \to \ln(1 - xy)$, (d) $f : (x, y, z) \to \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.



Problema 2.2 Dibuje de forma aproximada las curvas de nivel de las siguientes funciones:

1. $f(x,y) = 2x + y - 2$
2. $f(x,y) = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$
3. $f(x,y) = c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1}$



Problema 2.3 Utilice los sistemas de coordenadas que se indican para caracterizar de forma simple las siguientes regiones:

1. Caracterice en coordenadas cilíndricas y esféricas la región $z \geq c\sqrt{x+y}$.
2. Caracterice en coordenadas cartesianas y cilíndricas la región sólida dada por

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - z^2 \leq 0, \quad \text{con} \quad 0 \leq z \leq c.$$

3. Caracterice en coordenadas cartesianas y cilíndricas la región sólida delimitada por el elipsoide de ecuación

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$



Problema 2.4 Demuestre que no existe el límte de las siguientes funciones cuando $(x,y) \to (0,0)$:

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \qquad (b) \quad f(x,y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2},$$
$$(c) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \qquad (d) \quad f(x,y) = \frac{\exp\{x^2 - y^2\} - 1}{x^2 + y^2}.$$



Problema 2.5 Calcule (si existen) los límites que se proponen a continuación

$$(a) f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \to (2,3),$$
$$(b) f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \to (0,0),$$
$$(c) f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \to (0,0),$$
$$(d) f(x,y) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad (x,y) \to (0,0)$$



Problema 2.6 Estudie la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de las funciones que se proponen más abajo. En caso de que existan discontinuidades redefina la función (si es posible) de forma que sea continua.

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = \dfrac{e^{2(x+y^2)} - 1 - 2x - 2y^2}{(x+y)^2}$.



Problema 2.7 Halle las derivadas parciales de primer orden $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ de las siguientes funciones aplicando directamente la definición. Verifique el resultado obtenido utilizando las reglas de derivación estándar.

(a) $f(x,y) = x^2 y$, (b) $f(x,y) = y^2$, (c) $f(x,y) = e^{x^2 y}$



Problema 2.8 Halle las derivadas parciales de primer orden $f'_x(x,y)$ y $f'_y(x,y)$ de las siguientes funciones en todos los puntos de sus dominios de definición:

1. $f\,(x,y) = e^{x+y}$
2. $f\,(x,y) = \dfrac{2xy^2}{x+y}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f\,(x,y) = (0,0)$.
3. $f\,(x,y) = \dfrac{x}{y}$ para $y \neq 0$ y $f\,(x,y) = 0$ si $y = 0$.



Problema 2.9 Halle las derivadas direccionales $f'_{\vec{u}}\,(0,0)$ de las siguientes funciones

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2) - \operatorname{sen}(y^2)}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2+y^2)}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$



Problema 2.10 Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que:

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
2. Existen derivadas parciales (hasta orden dos) que nos son continuas en el origen de coordenadas.

Tema 3

Diferenciabilidad de las funciones reales escalares

3.1 Introducción

Sabemos que la gráfica de una función continua no tiene huecos, saltos o roturas. En $\mathbb{R}$ una función con derivada tiene una gráfica continua y suave, esto es, sin picos ni dobleces abruptas; la gráfica admite una recta tangente en todos sus puntos. Sin embargo, en el caso de una función de varias variables la existencia de las derivadas de primer orden no garantiza siquiera la continuidad de la función . Como ejemplo característico hemos visto que las derivadas direccionales de la función

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y} \text{ si } y \neq 0;\; f(x,0) = 0,$$

están bien definidas en $(0,0)$ cualquiera que sea el vector director. Sin embargo la función no es continua en dicho punto y su aspecto no es nada suave tal como se muestra en la siguiente figura

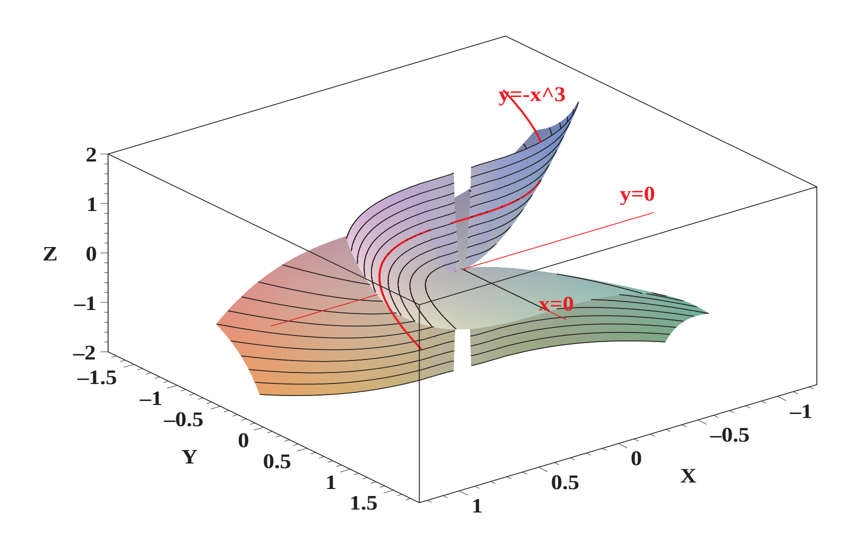


Figura 3.1: Gráfica de una función no diferenciable

Es lícito preguntarse como es posible que una función sea discontinua en un punto si tiene bien definidas todas sus derivadas direccionales en dicho punto. De hecho, dada la función escalar $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, que posee todas sus derivadas direccionales en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$, se cumple

$$f'_{\vec{\boldsymbol{u}}}(\vec{\boldsymbol{x}}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + h\vec{\boldsymbol{u}}) - f(\vec{\boldsymbol{x}}_0)}{h},$$

y por tanto

$$\lim_{h\to 0} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + h\vec{\boldsymbol{u}}\right) = f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) + \lim_{h\to 0} f'_{\vec{\boldsymbol{u}}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) h = f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right),$$

lo que sugiere que la función es continua en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$. Sin embargo, esta conclusión es falsa ya que

$$\lim_{h\to 0} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + h\vec{\boldsymbol{u}}\right) \neq \lim_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{x}}_0} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right).$$

La definición de límite de una función en un punto requiere que la función tienda a un valor fijo, cualquiera que sea el camino de aproximación a dicho punto; la aproximación por rectas que caracteriza la definición de las derivadas direcionales no es suficiente para definir correctamente el límite de la función .

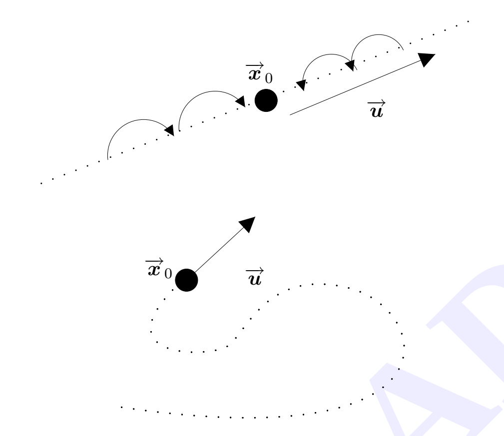


Figura 3.2: Diversos caminos de aproximación

En esta sección intentaremos motivar la definición de diferenciabilidad de las funciones escalares en $\mathbb{R}^q$. Debemos buscar una definición que garantice que la gráfica de una función de este tipo tenga un aspecto suave, sin esquinas, picos, etc. Por simplicidad trabajaremos en el plano, donde la gráfica de una función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una superficie en el espacio. Si dicha superficie fuese suficientemente suave debería admitir un plano tangente en todos los puntos de la misma; intentemos por tanto deducir como será la ecuación del plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. La ecuación de una plano genérico en $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$z = ax + by + c.$$

Se cumple que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = a$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = b$, por lo que las pendientes del plano a lo largo de los ejes X e Y son a y b respectivamente. Si este plano debe ser tangente a la gráfica de la función en el punto propuesto se deberá cumplir que

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = b.$$

De esta forma la ecuación

$$z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}y + c,$$

define una familia de planos paralelos entre sí y que tienen la «inclinación» adecuada para ser tangentes a la gráfica de la función en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Para determinar la constante c exigimos que el plano contenga el punto anterior, con lo cual obtenemos

$$z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + f(x_0, y_0),$$

que debería ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ si la función fuese razonablemente suave. Como se verá más adelante, resulta conveniente expresar la ecuación del plano mediante un producto escalar, es decir

$$z = f(x_0,y_0) + \left\langle \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right), (x - x_0, y - y_0) \right\rangle .$$

En el caso de funciones diferenciables de una variable real la recta tangente a la gráfica de la función en $(x_0, f(x_0))$ es una buena aproximación a f siempre que nos situemos «cerca» de x_0. Con la idea de precisar que significa en este contexto una buena aproximación repasemos la definición de derivada ordinaria. Si f es diferenciable en x_0 podemos escribir

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0),$$

o bien

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

donde hemos definido $x = x_0 + h$. Esta expresión que se puede rescribir de forma trivial como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Así, la función $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, que caracteriza la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$, se encuentra suficientemente cerca de $f(x)$ ya que la diferencia $f(x) - l(x)$ se va a cero más deprisa que $x - x_0$. Éste es el tipo de aproximaciones «razonables» que queremos adaptar a funciones reales en $\mathbb{R}^q$.

Ya estamos en disposición de dar una definición plausible de diferenciabildad para funciones de dos variables. Dada la función lineal

$$l(x,y) = f(x_0,y_0) + \left\langle \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right), (x - x_0, y - y_0) \right\rangle ,$$

decimos que f es diferenciable en (x_0, y_0) si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - l(x,y)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

En otras palabras, $l(x,y)$ es una buena aproximación a $f(x,y)$ cerca de (x_0, y_0), ya el error que cometemos es inferior a la distancia de (x,y) a (x_0, y_0).

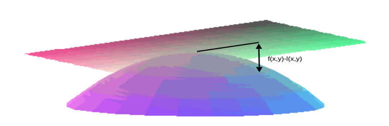


Figura 3.3: Error cometido en la aproximación lineal

3.2 Definición de diferenciabilidad

Nuestro objetivo es introducir una definición de diferenciabilidad que garantice simultáneamente la existencia de todas las derivadas direccionales, la continuidad de la función y que coincida con la definición que hemos dado para funciones de dos variables. Daremos primero la definición y demostraremos *a posteriori* que cumple todos estos requisitos.

Definición 3.1 (Infinitésimo de orden superior)

Sea g una función definida cerca del origen; decimos que $g\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right)$ es un infinitésimo de orden superior a $\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|$ si

$$\lim_{\vec{\boldsymbol{h}}\to\vec{\boldsymbol{0}}} \frac{g\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right)}{\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|} = 0,$$

en cuyo caso escribiremos que $g\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right) = \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|\right)$.

Definición 3.2 (Diferenciabilidad de una función escalar)

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en el conjunto D. Se dice que f es diferenciable en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$ si existe un vector $\vec{\boldsymbol{r}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ tal que

$$\lim_{\vec{\boldsymbol{x}}\to\vec{\boldsymbol{x}}_0} \frac{f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) - \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right), \left(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\right\rangle}{\left\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0\right\|} = 0.$$

Si $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable $\forall \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathring{D}$, decimos que f es diferenciable en D.

La condición de diferenciabilidad se puede escribir de forma alternativa como

$$f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + \vec{\boldsymbol{h}}\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) - \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right), \vec{\boldsymbol{h}}\right\rangle = \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|\right),$$

donde hemos substituido $\vec{\boldsymbol{x}}$ por $\vec{\boldsymbol{x}}_0 + \vec{\boldsymbol{h}}$. También puede escribirse como

$$f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + \vec{\boldsymbol{h}}\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) - \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right), \vec{\boldsymbol{h}}\right\rangle = \epsilon\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right)\left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|,$$

donde la función ϵ satisface que $\lim_{\vec{\boldsymbol{h}}\to\vec{\boldsymbol{0}}} \epsilon\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right) = 0$.

La definición precedente implica que la función lineal

$$\begin{aligned} l\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) &= f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) + \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right), \left(\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\right\rangle \\ &= f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) + \varphi_1\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\left(x_1 - x_{0_1}\right) + \cdots + \varphi_1\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\left(x_q - x_{0_q}\right), \end{aligned}$$

es una buena aproximación a $f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ en las proximidades de $\vec{\boldsymbol{x}}_0$. En la definición de diferenciabilidad para funciones de dos variables (sección 3.1) la función lineal se escribía

$$l(x,y) = f(x_0,y_0) + \left\langle \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right), (x - x_0, y - y_0) \right\rangle,$$

lo que implica que en este caso el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(x_0,y_0)$ viene dado por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right).$$

Veremos más adelante que $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right)$ coincide siempre con el vector de derivadas parciales, que se denomina gradiente de la función en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$.

Antes de abordar el estudio de las propiedades de las funciones diferenciables resulta conveniente ilustrar la definición de diferenciabilidad con algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1 (Una función diferenciable)

Estudiemos si la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Dado un punto genérico (x_0, y_0) se cumple que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) &= (x_0 + h_x)^2 + (y_0 + h_y)^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 h_x + 2y_0 h_y + h_x^2 + h_y^2 \\ &= f(x_0, y_0) + 2\langle (x_0, y_0), (h_x, h_y) \rangle + \left\| \vec{\boldsymbol{h}} \right\|^2, \end{aligned}$$

y por tanto

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) - 2\langle (x_0, y_0), (h_x, h_y) \rangle = \left\| \vec{\boldsymbol{h}} \right\|^2.$$

Ahora bien, es evidente que $\left\| \vec{\boldsymbol{h}} \right\|^2$ es un infinitésimo de orden superior a $\left\| \vec{\boldsymbol{h}} \right\|$. Es decir, existe un vector $\vec{\boldsymbol{r}}(x_0, y_0) = 2(x_0, y_0)$ tal que

$$f(x_0 + h_x, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) - \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}(x_0, y_0), (h_x, h_y) \right\rangle = \boldsymbol{o}\left(\left\| \vec{\boldsymbol{h}} \right\| \right),$$

lo que nos permite afirmar que la función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Este resultado implica que la función lineal

$$l(h_x, h_y) = f(x_0, y_0) + \left\langle \vec{\boldsymbol{r}}(x_0, y_0), (h_x, h_y) \right\rangle,$$

es una buena aproximación a la verdadera función $f(x,y)$ cuando (x,y) está cerca de (x_0, y_0).



Ejemplo 3.2 (El «cono» no es diferenciable en el origen)

Sea la función $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ definida en todo el plano. Supongamos que la función es diferenciable en el punto (x_0, y_0), es decir, que existe un vector $\vec{\boldsymbol{r}}(x_0, y_0) = (a, b)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x_0^2+y_0^2} - \langle (a,b), (x-x_0, y-y_0) \rangle}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0.$$

Definiendo $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\operatorname{sen}\theta$ y teniendo en cuenta que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \equiv \lim_{r\to 0}$, resulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2+r^2+2r(x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta)} - \sqrt{x_0^2+y_0^2} - (ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta)}{r} = 0.$$

Para simplificar el cálculo podemos utilizar que $r \simeq 0$ y desarrollar en serie de potencias la primera raiz del numerador, de manera que

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2+r^2+2r(x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta)} \simeq \sqrt{x_0^2+y_0^2} + \frac{r^2 + 2r(x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta)}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

Substituyendo el desarrollo en la expresión anterior obtenemos

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{r + 2(x_0\cos\theta + y_0\operatorname{sen}\theta)}{2\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - (a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta) \right) = 0,$$

ó

$$\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - a \right)\cos\theta + \left(\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - b \right)\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Por lo tanto el vector $\vec{r}\,(x_0, y_0)$ viene dado en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ por

$$\vec{r}\,(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \right),$$

de manera que la función es diferenciable en todos los puntos del plano excepto en el origen de coordenadas donde $\vec{r}\,(x_0, y_0)$ no está definido. El lector se habrá dado cuenta de que el vector $\vec{r}\,(x_0, y_0)$ tiene por componentes las derivadas parciales de la función.



Nos centramos ahora en el estudio de las propiedades más importantes de las funciones diferenciables y especialmente en determinar la relación que existe entre el vector $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$ y las derivadas parciales de la función .

3.3 Propiedades de las funciones escalares diferenciables

Teorema 3.1

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar definida en el conjunto D. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$, se cumple que:

1. *La función f es continua en $\vec{x}_0$. El recíproco es falso.*
2. *El vector $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$ es único y viene dado por el gradiente de la función en dicho punto, es decir*

$$\vec{r}\left(\vec{x}_0\right) = \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) = \left(\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_q} \right).$$

3. *La función f posee derivada direccional en $\vec{x}_0$, según la dirección orientada $\vec{u}$, dada por*

$$f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right) = \left\langle \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right), \vec{u} \right\rangle,$$

cualquiera que sea el vector director $\vec{u}$. El recíproco es falso.

Demostración 3.1

1. Si f es diferenciable en $\vec{x}_0$

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + \epsilon\left(\vec{h}\right) \left\| \vec{h} \right\|,$$

con $\epsilon \xrightarrow{\vec{h} \to \vec{0}} 0$. Tomando el límite cuando $\vec{h} \to \vec{0}$ tenemos

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \left[\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + \epsilon\left(\vec{h}\right) \left\| \vec{h} \right\| \right] = f\left(\vec{x}_0\right).$$

Por lo tanto

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)=f\left(\vec{x}_0\right),$$

y la función es continua en $\vec{x}_0$. El recíproco es falso: la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es continua en $(0,0)$ pero no es diferenciable en dicho punto.

2.a **Unicidad del vector** $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$**.** Supongamos que existen dos vectores $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$ y $\vec{\xi}\left(\vec{x}_0\right)$ tales que

$$f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{h}\right\rangle+o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),$$
$$f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle \vec{\xi}\left(\vec{x}_0\right),\vec{h}\right\rangle+o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).$$

Restando una ecuación de la otra y dividiendo por la norma de $\vec{h}$ resulta

$$\frac{\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\vec{h}\right\rangle}{\left\|\vec{h}\right\|}=\frac{o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|},$$

donde hemos utilizado que la suma o diferencia de dos infinitésimos es un infinitésimo del mismo orden. Tomando el límite cuando $\vec{h}\to\vec{0}$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\vec{h}\right\rangle}{\left\|\vec{h}\right\|}=\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|}=0.$$

Por lo tanto la función del miembro izquierdo, dependiente de la diferencia entre ambos vectores, tiende a cero cualquiera que sea el camino por el que $\vec{h}$ se aproxima a $\vec{0}$. Consideremos el caso particular en que $\vec{h}=\lambda\vec{u}$ con $\left\|\vec{u}\right\|=1$

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\vec{h}\right\rangle}{\left\|\vec{h}\right\|}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\lambda\vec{u}\right\rangle}{|\lambda|\left\|\vec{u}\right\|}=\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\vec{u}\right\rangle\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda}{|\lambda|}=0$$

Como $\lim_{\lambda\to 0}\lambda/|\lambda|\neq 0$

$$\left\langle \vec{r}-\vec{\xi},\vec{u}\right\rangle=0,$$

cualquiera que sea el vector $\vec{u}$. Dado que el producto escalar es cero si y sólo si alguno de los vectores es el vector nulo y $\vec{u}\neq\vec{0}$ concluimos que

$$\vec{r}=\vec{\xi}.$$

2.b $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)=\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right)$. Partiendo de la relación

$$f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{h}\right\rangle+\epsilon\left(\vec{h}\right)\left\|\vec{h}\right\|,\ \epsilon\xrightarrow{\vec{h}\to\vec{0}}0,$$

y aplicando la definición de derivada direccional obtenemos que $f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{u}\right\rangle$. En efecto,

$$f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(\vec{x}_0+\lambda\vec{u}\right)-f\left(\vec{x}_0\right)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\lambda\vec{u}\right\rangle+\epsilon\left(\lambda\vec{u}\right)\left\|\lambda\vec{u}\right\|}{\lambda}$$
$$=\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{u}\right\rangle+\underbrace{\lim_{\lambda\to 0}\epsilon\left(\lambda\vec{u}\right)}_{\equiv 0}\frac{\left\|\lambda\vec{u}\right\|}{\lambda}=\left\langle \vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{u}\right\rangle.$$

Expresando ahora $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^q$

$$\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)=\sum_{i=1}^{q}\varphi_i\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_i,$$

utilizando que $\left\langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\right\rangle=\delta_{ij}$ y que $\dfrac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_j}=f'_{\vec{e}_j}\left(\vec{x}_0\right)$, tenemos que

$$\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_j}=f'_{\vec{e}_j}\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle\vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{e}_j\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{q}\varphi_i\left(\vec{x}_0\right)\vec{e}_i,\vec{e}_j\right\rangle=\varphi_j\left(\vec{x}_0\right),$$

es decir, las componentes del vector $\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)$ en la base canónica vienen dadas por las derivadas parciales de la función en $\vec{x}_0$. Por lo tanto

$$\vec{r}\left(\vec{x}_0\right)=\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}\vec{e}_i=\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right).$$

2. A partir de aquí resulta trivial obtener el resultado para la derivada direccional

$$f'_{\vec{u}}\left(\vec{x}_0\right)=\left\langle\vec{r}\left(\vec{x}_0\right),\vec{u}\right\rangle=\left\langle\vec{\nabla}f\left(\vec{x}_0\right),\vec{u}\right\rangle.$$

Para demostrar que el recíproco de esta propiedad es falso bastará que encontremos un contraejemplo (véase el ejemplo 3.4)



Ejemplo 3.3 (Derivadas de una función diferenciable)

Dada la función

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy}{x+y} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

se pide que:

1. obtenga las derivadas $f'_{\vec{u}}(0,0)$ aplicando su definición,
2. demuestre que es diferenciable en $(0,0)$,
3. verifique que $f'_{\vec{u}}(0,0) = \left\langle \vec{\nabla} f(0,0), \vec{u} \right\rangle$.

1. Las derivadas direccionales en el origen se definen como

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda\cos\theta, \lambda \operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda\cos\theta + \lambda\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\lambda}$$
$$= \cos\theta.$$

En particular, las derivadas direccionales se obtienen de las direccionales tomando $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Es decir

$$\begin{array}{lllll} f'_x(0,0) & = & f'_{\vec{\imath}}(0,0) & = & \cos 0 = 1, \\ f'_y(0,0) & = & f'_{\vec{\jmath}}(0,0) & = & \cos\pi/2 = 0. \end{array}$$

2. La función $f(x,y)$ será diferenciable en $(0,0)$ si

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y) \right\rangle}{\sqrt{x+y}} = 0.$$

Substituyendo $\vec{\nabla} f(0,0) = (1,0)$ en la expresión anterior, tenemos

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + \dfrac{xy}{x+y} - \langle (1,0), (x,y) \rangle}{\sqrt{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x+y)^{3/2}},$$

y pasando a coordenadas polares

$$L = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0,$$

con lo cual $f(x,y)$ es diferenciable en el origen de coordenadas.

3. Como la función es diferenciable en $(0,0)$ podemos aplicar la expresión $f'_{\vec{u}}(0,0) = \left\langle \vec{\nabla} f(0,0), \vec{u} \right\rangle$ para calcular las derivadas direccionales. De esta manera obtenemos

$$\left\langle \vec{\nabla} f(0,0), \vec{u} \right\rangle = \langle (1,0), (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \rangle = \cos\theta,$$

resultado que coincide con el que obtuvimos por aplicación directa de la definición de derivada direccional.



Con el siguiente ejemplo pretendemos mostrar que la derivabilidad de una función no garantiza su diferenciabilidad. Más adelante estudiaremos que condiciones deben satisfacer las derivadas de modo que la función sea diferenciable.

Ejemplo 3.4 (Una función derivable que no es diferenciable en el origen)

Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy-2x}{x+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Su derivada direccional en el origen de coordenadas a lo largo de la dirección orientada definida por $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda\cos\theta, \lambda\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{3\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta + \lambda^2\operatorname{sen}^4\theta}.$$

Si $theta = 0$ ó π tenemos que $\vec{u} = (0, \pm 1)$ y

$$f'_{(0,\pm 1)}(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0}{\lambda^2} = 0,$$

mientras que en cualquier otro caso

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \frac{3\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta}{\cos\theta} = 3\operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta, \quad \theta \neq 0\,\pi.$$

Para determinar la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$ debemos aplicar la definición y verificar si el límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y) \right\rangle}{\sqrt{x+y}},$$

es nulo. Utilizando el resultado previo para las derivadas direccionales obtenemos que $\vec{\nabla} f(0,0) = (-2, 0)$, de manera que

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{3xy-2x}{(x+y^4)} + 2x}{\sqrt{x+y}}.$$

Reescribiendo el límite en polares

$$L = \lim_{r\to 0} \left[\frac{3\cos\theta\operatorname{sen}\theta - 2\cos^3\theta}{\cos\theta + r^2\operatorname{sen}^4\theta} + 2\cos\theta \right],$$

con lo cual si $\cos\theta = 0$ resulta que $L = 0$, y si por el contrario $\cos\theta \neq 0$ obtenemos $L = 3\operatorname{sen}\theta$. Como L depende de θ concluimos que el límite no existe y que la función no es diferenciable en $(0,0)$.

Así, el caso que hemos propuesto nos proporciona un ejemplo en el que la función posee todas sus derivadas direccionales en un punto y sin embargo no es diferenciable.

Teorema 3.2 (Propiedades aritméticas de las funciones diferenciables)

Sean $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones escalares definidas en el conjunto D. Si ambas funciones son diferenciables en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$, es decir, si

$$f_i\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_i(\vec{x}_0) - \left\langle \vec{\nabla} f_i(\vec{x}_0), \vec{h} \right\rangle = o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right), \; i = 1, 2,$$

entonces las funciones $g = \lambda f_1, \; \lambda f_2, \; f_1 + f_2, \; f_1 f_2, \; f_1/f_2$ (ésta última siempre que f_2 no se anule cerca de $\vec{x}_0$) son diferenciables en $\vec{x}_0$, y por tanto

$$g\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - g(\vec{x}_0) - \left\langle \vec{\nabla} g(\vec{x}_0), \vec{h} \right\rangle = o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).$$

Demostración 3.2

En cualquiera de los cuatro casos deberemos probar que el incremento $\Delta g = g\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - g\left(\vec{x}_0\right)$ satisface que

$$\Delta g = \left\langle \vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).$$

Consideremos el producto de dos funciones $g\left(\vec{x}\right) = f_1 f_2 \left(\vec{x}\right) = f_1\left(\vec{x}\right) f_2\left(\vec{x}\right)$. El incremento de la función es

$$\Delta g = (f_1 f_2)\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - (f_1 f_2)\left(\vec{x}_0\right) = f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) f_2\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_1\left(\vec{x}_0\right) f_2\left(\vec{x}_0\right),$$

y tras sumar y restar $f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) f_2\left(\vec{x}_0\right)$ obtenemos

$$\Delta g = f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right)\left[f_2\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_2\left(\vec{x}_0\right)\right] + f_2\left(\vec{x}_0\right)\left[f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_1\left(\vec{x}_0\right)\right].$$

Ahora bien, como las funciones $f_1\left(\vec{x}\right)$ y $f_2\left(\vec{x}\right)$ son diferenciables en $\vec{x}_0$ sus incrementos verifican que

$$f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_1\left(\vec{x}_0\right) = \left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),$$

y

$$f_2\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f_2\left(\vec{x}_0\right) = \left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + o_2\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).$$

Substituyendo en la expresión para Δg, resulta

$$\begin{aligned}\Delta g = {}& f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right)\left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + f_2\left(\vec{x}_0\right)\left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle \\ & + f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) o_2\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) + f_2\left(\vec{x}_0\right) o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right).\end{aligned}$$

Utilizamos de nuevo la diferenciabilidad de la función f_1, con lo cual

$$\begin{aligned}\Delta g = {}& f_1\left(\vec{x}_0\right)\left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + f_2\left(\vec{x}_0\right)\left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle \\ & + \left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle\left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) o_2\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) \\ & + f_2\left(\vec{x}_0\right) o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) + \left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} g\left(\vec{x}\right) = f_1\left(\vec{x}\right)\vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}\right) + f_2\left(\vec{x}\right)\vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}\right)$ (veáse el teorema **??**), llegamos a que

$$\begin{aligned}\Delta g = {}& \left\langle \vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle\left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle \\ & + f_1\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) o_2\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) + f_2\left(\vec{x}_0\right) o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) + \left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle o_1\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),\end{aligned}$$

Los términos proporcionales a $o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$ son infinitésimos de orden superior a $\left\|\vec{h}\right\|$. Con el fin de no alargar la demostración aceptaremos sin demostración que el producto $\left\langle \vec{\nabla} f_1\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle\left\langle \vec{\nabla} f_2\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle$ también es un infinitésimo de orden superior a $\left\|\vec{h}\right\|$. El lector con ciertas ansias de rigor y suficientes reservas de energía puede consultar el ejemplo 3.5 para convencerse de la validez de la afirmación. Aceptándola como verdadera

$$\Delta g = \left\langle \vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right), \vec{h} \right\rangle + o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),$$

de manera que g es diferenciable en el punto $\vec{x}_0$.

Ejemplo 3.5 (Otro ejemplo de infinitésimo)

Utilizaremos este ejemplo para demostrar que, dados Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ constantes

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\left\langle \vec{a}, \vec{h} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{h} \right\rangle}{\left\|\vec{h}\right\|} = 0,$$

y por tanto $\left\langle \vec{a}, \vec{h} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{h} \right\rangle = o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)$.

El resultado es evidente si $\vec{a} = \vec{0}$ o $\vec{b} = \vec{0}$. Cuando $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ utilizamos de forma explícita la definición de límite; para ello supondremos que $0 < \left\|\vec{h} - \vec{0}\right\| < \delta$; entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\left\langle \vec{a}, \vec{h} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{h} \right\rangle}{\left\|\vec{h}\right\|} - 0\right| &= \frac{\left|\left\langle \vec{a}, \vec{h} \right\rangle\right| \left|\left\langle \vec{b}, \vec{h} \right\rangle\right|}{\left\|\vec{h}\right\|} = \frac{\left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \left\|\vec{h}\right\|^2 \left|\cos\theta_1 \cos\theta_2\right|}{\left\|\vec{h}\right\|} \\ &\leq \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \left\|\vec{h}\right\| < \left\|\vec{a}\right\| \left\|\vec{b}\right\| \delta.\end{aligned}$$

3.4 Propiedades del gradiente

En lo que sigue distinguiremos entre propiedades aritméticas y propiedades geométricas del gradiente. Las primeras relacionan entre sí los gradientes de dos funciones cualesquiera con los gradientes de las funciones suma, producto y cociente. Como puede apreciarse guardan una gran similitud con las reglas de derivación de las funciones escalares.

Teorema 3.3 (Propiedades aritméticas del gradiente)

Sean f y g dos funciones definidas en el conjunto D cuyas derivadas parciales se encuentran bien definidas en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$; se cumple entonces que

1. $\vec{\nabla}[\lambda f]\left(\vec{x}_0\right) = \lambda \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right)$
2. $\vec{\nabla}[f+g]\left(\vec{x}_0\right) = \vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) + \vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right)$
3. $\vec{\nabla}[fg]\left(\vec{x}_0\right) = g\left(\vec{x}_0\right)\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) + f\left(\vec{x}_0\right)\vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right)$
4. $\vec{\nabla}[f/g]\left(\vec{x}_0\right) = \dfrac{g\left(\vec{x}_0\right)\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) - f\left(\vec{x}_0\right)\vec{\nabla} g\left(\vec{x}_0\right)}{\left[g\left(\vec{x}_0\right)\right]^2}$, $\left(g\left(\vec{x}_0\right) \neq 0\right)$.

Demostración 3.3

Utilizando la definición de gradiente tenemos

$$\vec{\nabla}[\lambda g]\left(\vec{x}_0\right) = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial(\lambda f)\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}\vec{e}_i = \lambda \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{e}_i = \lambda \vec{\nabla} f.$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left[f+g\right]\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) &= \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial(f+g)\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{q}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\vec{\boldsymbol{e}}_i \\
&= \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i + \sum_{i=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f + \vec{\boldsymbol{\nabla}} g.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left[fg\right]\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) &= \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial(fg)\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{q}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}g+f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\vec{\boldsymbol{e}}_i \\
&= g\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i + f\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i = g\vec{\boldsymbol{\nabla}} f + f\vec{\boldsymbol{\nabla}} g.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\nabla}}\left[f/g\right]\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) &= \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial(f/g)\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i = \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}g-f\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\vec{\boldsymbol{e}}_i \\
&= \frac{1}{g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)^2}\left[g\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial f}{\partial x_i}\vec{\boldsymbol{e}}_i - f\sum_{i=1}^{q}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]\vec{\boldsymbol{e}}_i \\
&= \frac{1}{\left[g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\right]^2}\left[g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\vec{\boldsymbol{\nabla}} g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\right].
\end{aligned}
$$

Las propiedades geométricas relacionan el comportamiento del gradiente con el crecimiento de la función y con sus conjuntos de nivel.

Teorema 3.4 (Propiedades geométricas del gradiente)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto D y diferenciable en su interior. Se verifica entonces que:

1. *Las direcciones orientadas definidas por $\pm\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ son aquellas en las que f tiene derivada direccional extrema en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$: máxima correspondiente al signo positivo y mínima al signo negativo. Además f tiene derivada direccional nula en cualquier dirección ortogonal a $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$.*
2. *El vector $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f$ es ortogonal a los conjuntos de nivel de la función . Dado el conjunto de nivel de la función C_k y $\vec{\boldsymbol{x}}_0, \vec{\boldsymbol{x}}_0 + \vec{\boldsymbol{h}} \in C_k$, se cumple*

$$
\underbrace{\lim_{\vec{\boldsymbol{h}}\to\vec{\boldsymbol{0}}}}_{\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0+\vec{\boldsymbol{h}}\in C_k\right)} \left\langle \vec{\boldsymbol{u}}_h, \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)\right\rangle = 0,
$$

donde $\vec{\boldsymbol{u}}_h = \vec{\boldsymbol{h}} / \left\|\vec{\boldsymbol{h}}\right\|$ es el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{\boldsymbol{h}}$. Denotamos este hecho como $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f \perp C_k$.

Ejemplo 3.6

Las siguientes figuras muestran de forma gráfica y esquemática las propiedades geométricas del gradiente

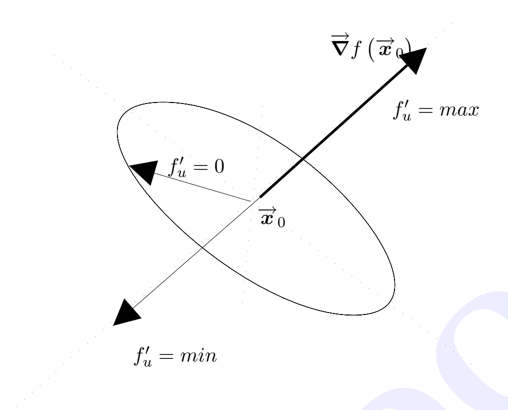


Figura 3.4: Dirección y sentido del gradiente

El gradiente y el punto donde se calcula definen un plano de variación nula de la función : cuando nos desplazamos infinitesimal y perperdicularmente a dicho plano, según la dirección y sentido del gradiente, el crecimiento de la función es máximo; si nos desplazamos en sentido opuesto el decrecimiento es máximo; finalmente cualquier desplazamiento infinitesimal en el plano perpendicular al gradiente produce una variación nula de la función .

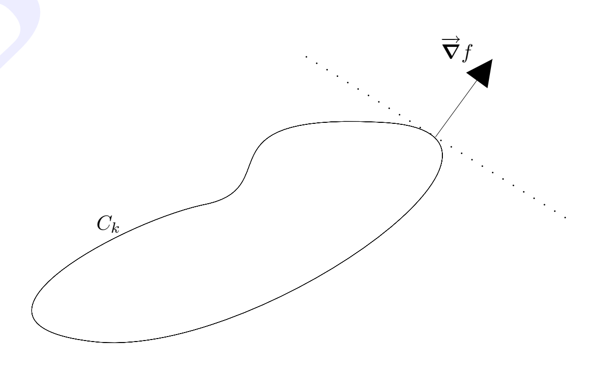


Figura 3.5: El gradiente es normal al conjunto de nivel

En el plano los conjuntos de nivel son curvas contenidas en el dominio de definición de la función donde ésta toma un valor constante. El gradiente es perpendicular a la tangente a la curva de nivel en cada punto de la misma; decimos que el gradiente es ortogonal a la curva de nivel.

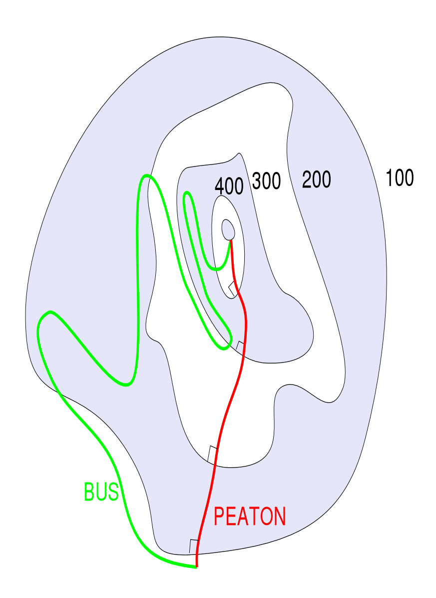


Figura 3.6: La casa de mis padres en Altza

La casa de mis padres se encuentra en un barrio de San Sebastián llamado ALTZA. El barrio se situa sobre una colina que se alza unos 400 metros sobre el nivel del mar. La carretera que baja desde la colina (línea verde) llega zigzagueando hasta la general N-I. Como puede observarse la carretera discurre en la medida de lo posible paralela a las curvas de nivel del terreno; así, pagando como precio una gran longitud se consigue que la pendiente de la carretera sea lo menor posible. Por el contrario el camino peatonal (línea roja) discurre de forma casi perpendicular a las curvas de nivel con lo cual se logra que, con una pendiente muy pronunciada, tenga menor longitud.

Demostración 3.4

1. Como la función es diferenciable $f'_{\vec{x}_0}(\vec{u}) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{u} \right\rangle$ y expresando el producto escalar en función de las normas y del ángulo que forman los vectores

$$f'_{\vec{x}_0}(\vec{u}) = \left\| \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \right\| \cos\theta,$$

de donde se deduce que

$$-\left\| \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \right\| \leq f'_{\vec{x}_0}(\vec{u}) \leq \left\| \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \right\|.$$

En consecuencia

$$\begin{array}{llcll} \text{Si } \theta = 0 & \Rightarrow f'(\vec{x}_0) & = & \|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\| & \text{(max)} \\ \text{Si } \theta = \pi & \Rightarrow f'(\vec{x}_0) & = & -\|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\| & \text{(min)} \\ \text{Si } \theta = \pi/2, 3\pi/2 & \Rightarrow f'(\vec{x}_0) & = & 0 & \end{array}$$

2. Como f es diferenciable en $\mathring{D}$, se verifica que

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f(\vec{x}_0) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{h} \right\rangle + \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|\right),$$

para todo $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$. Tal como se afirma en el enunciado del teorema $\vec{x}_0$ y $\vec{x}_0 + \vec{h} \in C_k$, con lo cual

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f(\vec{x}_0) = k \to f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f(\vec{x}_0) = 0.$$

Por lo tanto

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{h} \right\rangle = o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right) \Rightarrow \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{u}_h \right\rangle = \frac{o\left(\left\|\vec{h}\right\|\right)}{\left\|\vec{h}\right\|}.$$

Tomando límites:

$$\underbrace{\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}}_{\vec{x}_0+\vec{h}\in C_k} \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{u}_h \right\rangle = 0.$$

3.5 Plano tangente y recta normal a una superficie

Rectas tangente y normal a una curva. Sea C una curva continua definida por la ecuación

$$f(x,y) = 0,$$

donde f es una función diferenciable. Podemos considerar que C es la curva de nivel con valor $k = 0$ de la función $z = f(x,y)$. De acuerdo con el teorema 3.4 , el vector

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right),$$

es ortogonal a la curva en el punto (x_0,y_0) y es fácil demostrar que el vector

$$\vec{T}(x_0,y_0) = \left(f'_y(x_0,y_0), -f'_x(x_0,y_0)\right),$$

es tangente a la curva en el punto dado; en efecto, se cumple que

$$\left\langle \vec{\nabla} f(x_0,y_0), \vec{T}(x_0,y_0) \right\rangle = 0.$$

La tangente a la curva C en (x_0,y_0) se define como la recta que pasa por dicho punto y es ortogonal al gradiente, es decir, un punto (x,y) pertenece a la tangente si y solo si

$$\left\langle (x-x_0, y-y_0), \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \right\rangle = 0,$$

o bien

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

Utilizando un razonamiento análogo y el vector tangente se deduce que la ecuación de la recta normal es

$$f'_y(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_x(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$

Teorema 3.5 (Rectas normal y tangente a una curva en $\mathbb{R}^2$)

Dada la curva continua C definida por la ecuación $f(x,y) = 0$, con f una función diferenciable, las ecuaciones de las rectas tangente y normal a C en el punto (x_0,y_0) son:

- ***Recta tangente.*** $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$
- ***Recta normal.*** $f'_y(x_0,y_0)(x-x_0) - f'_x(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$

Plano tangente y recta normal a una superficie. Una superficie S en el espacio queda perfectamente definida mediante una ecuación de la forma

$$f(x, y, z) = 0,$$

que puede interpretarse como la superficie de nivel de valor $k = 0$ de la función $w = f(x, y, z)$. Si esta función es diferenciable, el gradiente $\vec{\nabla} f(x, y, z)$ es normal a S en cada punto de la misma. Dado un punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$, el plano tangente a la superficie en dicho punto contiene a (x_0, y_0, z_0) y es normal a $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$; por lo tanto su ecuación vendrá dada por

$$\left\langle \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle,$$

o de forma análoga

$$f'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

El gradiente de la función también permite escribir con facilidad la ecuación vectorial de la recta normal a la superficie en un punto de la misma. La normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es la recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director el gradiente $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$, es decir

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces las ecuaciones de la recta normal en forma paramétrica vienen dadas por

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t f'_x(x_0, y_0, z_0), \\ y &= y_0 + t f'_y(x_0, y_0, z_0), \\ z &= z_0 + t f'_z(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7 (Plano tangente a un elipsoide)

Obtenga las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al elipsoide de ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

en el punto (x_0, y_0, z_0).

Solución: La ecuación del elipsoide define el conjunto de nivel C_0 de la función $w = f(x, y, z) = x/a + y/b + z/c - 1$. Como la función es diferenciable en $\mathbb{R}^3$ la ecuación del plano tangente a C_0 en el punto (x_0, y_0, z_0) viene dada por

$$\left\langle \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0.$$

Ahora bien

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{a}, \frac{2y}{b}, \frac{2z}{c} \right),$$

y en consecuencia la ecuación del plano puede escribirse como

$$(x - x_0)\frac{2x_0}{a} + (y - y_0)\frac{2y_0}{b} + (z - z_0)\frac{2z_0}{c} = 0.$$

Simplificando y teniendo en cuenta que

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1,$$

resulta

$$\frac{xx_0}{a} + \frac{yy_0}{b} + \frac{zz_0}{c} = 1.$$

Plano tangente y recta normal a la gráfica de una función. La gráfica de una función de dos variables reales, $z = g(x, y)$, es una superficie en el espacio. Para poder determinar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal en cualquier punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ de la gráfica, reescribimos la ecuación de la superficie como

$$f(x, y, z) = 0,$$

donde

$$f(x, y, z) = g(x, y) - z.$$

De esta forma, las derivadas parciales se escriben

$$f'_x(x, y, z) = g'_x(x, y), \quad f'_y(x, y, z) = g'_y(x, y), \quad f'_z(x, y, z) = -1,$$

y substituyendo en la ecuación del plano tangente resulta

$$g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

o de forma equivalente

$$z = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Un razonamiento análogo permite escribr las ecuaciones paramétricas de la recta normal como

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t g'_x(x_0, y_0), \\ y &= y_0 + t g'_y(x_0, y_0), \\ z &= g(x_0, y_0) - t. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8 (Plano tangente a la gráfica de una función)

Obtenga las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x, y) = e^{xy}$ en $(1, 0)$.

Solución: La función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por lo que admite un plano tangente en todos y cada uno de los puntos de su dominio de definición y en particular en $(1, 0)$. La ecuación de este plano se escribe como

$$z = z_0 + (x - 1) f'_x(1, 0) + (y - 0) f'_y(1, 0),$$

y dado que $f'_x = ye^{xy}$ y $f'_y = xe^{xy}$, resulta

$$z = 1 + 0(x - 1) + 1y = 1 + y.$$

Teorema 3.6 (Plano tangente y recta normal a una superficie en $\mathbb{R}^3$)

Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie en el espacio definida por la ecuación $f(x, y, z) = 0$, donde f una función diferenciable. Entonces las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0) vienen dadas por:

- ***Plano tangente.***

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

- ***Recta normal.***

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3.7 (Plano tangente y recta normal a una gráfica en $\mathbb{R}^3$)

Si $S \subset \mathbb{R}^3$ es la gráfica de la función diferenciable $z = g(x, y)$, las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a S en el punto $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ se escriben como:

- ***Plano tangente.***

$$z = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

- ***Recta normal.***

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, g(x_0, y_0)) + t\left(\vec{\nabla} f(x_0, y_0), -1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Plano tangente y recta normal a una hipersuperficie. Todos estos resultados se pueden generalizar sin dificultad a espacios euclídeos de dimensión arbitraria ($q \geq 2$). Una superficie $S \subset \mathbb{R}^q$ se puede definir mediante una ecuación de la forma

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0,$$

que establece una ligadura entre las q variables independientes asociadas a los grados de libertad del espacio $\mathbb{R}^q$. La superficie S coincide con el conjunto de nivel C_0 de la función $z = f(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ y por lo tanto el gradiente de f es perpendicualar a S en todos sus puntos. Siguiendo el mismo razonamiento que en $\mathbb{R}^3$ obtenemos que la ecuación del plano tangente a S en el punto $\vec{x}_0$ viene dada por

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \right\rangle = 0,$$

y que la ecuación de la recta normal a la superficie en dicho punto se escribe como

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + t\vec{\nabla} f(\vec{x}_0).$$

Podemos adapatar fácilmente estas expresiones al caso de la gráfica S de una función $z =$

$g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = g\left(x_1, x_2, \cdots, x_q\right)$. En efecto, S coincide con el conjunto de nivel C_0 de la función $w = f\left(x_1, \cdots, x_q, z\right) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, z\right) = g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - z$ ya que

$$C_0 = \left\{\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, z\right) \quad \backslash. \ f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, z\right) = 0, \ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D\right\},$$

y teniendo en cuenta que $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, z\right) = g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - z$

$$C_0 = \left\{\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, g\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)\right) \quad \backslash. \ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D\right\},$$

que coincide con la definición de la gráfica S de g.

Si la función $z = g$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, la función $f = g - z$ satisface que:

1. es diferenciable en $(\vec{x}_0, z_0)$,
2. $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0, z_0) = \left(\dfrac{\partial(g-z)}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial(g-z)}{\partial x_q}, \dfrac{\partial(g-z)}{\partial z}\right) = \left(\vec{\nabla} g(\vec{x}_0), -1\right)$
3. $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0, z_0) \perp S$ en el punto $(\vec{x}_0, z_0) \in S$.

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a S en $(\vec{x}_0, z_0)$ viene dada por

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0, z_0), (\vec{x}, z) - (\vec{x}_0, z_0) \right\rangle = 0,$$

o de forma equivalente $z = z_0 + \left\langle \vec{\nabla} g(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \right\rangle$.

Por lo que a la recta normal a S en $(\vec{x}_0, z_0)$ se refiere, su ecuación vectorial se escribe

$$(\vec{x}, z) = (\vec{x}_0, z_0) + t\vec{\nabla} f(\vec{x}_0, z_0) = (\vec{x}_0, z_0) + t\left(\vec{\nabla} g(\vec{x}_0), -1\right).$$

3.6 Algunos teoremas de las funciones diferenciables

En las secciones precedentes hemos introducido el concepto de diferenciabilidad de una función y hemos estudiado algunas de sus propiedades. Sabemos, por ejemplo, que si una función es diferenciable en un punto, entonces se comporta como una función lineal cerca de dicho punto y su gráfica es continua y tiene un aspecto «liso» hasta tal grado que se confunde con su plano tangente en dicho punto. Enunciamos ahora, en forma de teoremas, algunas propiedades importantes adicionales de las funciones diferenciables.

3.6.1 El teorema del valor medio

Teorema 3.8 (Teorema del valor medio)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto D. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b} = \vec{a} + \vec{h}$ dos puntos pertenecientes a D, tales que el segmento $[a, b] \subset D$. Si f es diferenciable en todos los puntos del segmento (a, b) se cumple que:

$$f\left(\vec{a} + \vec{h}\right) - f(\vec{a}) = \left\langle \vec{\nabla} f\left(\vec{a} + \xi\vec{h}\right), \vec{h} \right\rangle, \; \xi \in (0,\, 1),$$

El teorema también se puede escribir en términos de derivadas direccionales, esto es,

$$f\left(\vec{a} + \vec{h}\right) - f(\vec{a}) = \left\|\vec{h}\right\| f'_{\vec{u}_h}\left(\vec{a} + \xi\vec{h}\right),$$

donde $\vec{u}_h$ es el vector unitario que posee la misma dirección y sentido que el vector $\vec{h}$.

La figura muestra la interpretación geométrica del teorema del valor medio en $\mathbb{R}^2$. El teorema garantiza la existencia de un punto del segmento (a, b) (que denotamos como $\vec{a} + \xi\vec{h}$) donde

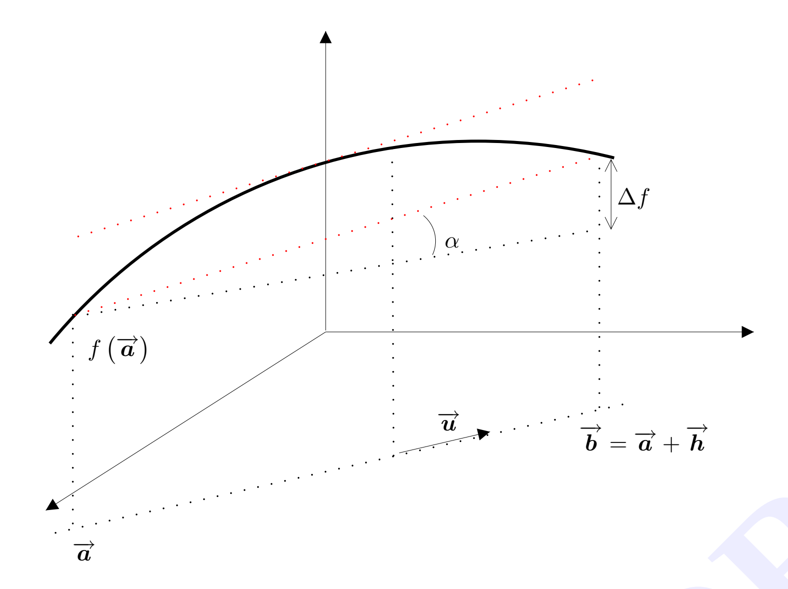


Figura 3.7: Interpretación geométrica

la pendiente de la recta tangente a la sección de la gráfica que contiene dicho segmento es igual a la pendiente de la recta que conecta los valores de la función en los extremos $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Demostración 3.8

Sea $\varphi : [0,1] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \in [0,1] \longrightarrow \varphi(t) = f\left(\vec{a} + t\vec{h}\right)$ la función de una variable real que toma los mismos valores que f en los puntos del segmento $\overrightarrow{[a,b]}$; por ejemplo, $\varphi(0) = f(\vec{a})$ y $\varphi(1) = f\left(\vec{b}\right)$. Demostremos primero que φ es derivable

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\varphi(t+\lambda) - \varphi(t)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f\left(\vec{a} + t\vec{h} + \lambda\vec{h}\right) - f\left(\vec{a} + t\vec{h}\right)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\left\langle \vec{\nabla} f\left(\vec{a} + t\vec{h}\right), \lambda\vec{h}\right\rangle + o\left(\lambda\vec{h}\right)}{\lambda} = \left\langle \vec{\nabla} f\left(\vec{a} + t\vec{h}\right), \vec{h}\right\rangle \\
&= \left\|\vec{h}\right\| f'_{\vec{u}_h}\left(\vec{a} + t\vec{h}\right)
\end{aligned}$$

Como la función $\varphi(t)$ es derivable en $[0,1]$ podemos aplicar el teorema del valor medio para funciones de una sola variable; así

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(1-0) = \varphi'(\xi)\,,\ \xi \in (0,1)\,.$$

Entonces, substituyendo φ por su definición

$$f\left(\vec{a} + \vec{h}\right) - f(\vec{a}) = \|\vec{h}\| f'_{\vec{u}_h}\left(\vec{a} + \xi\vec{h}\right).$$

3.6.2 La regla de la cadena

El resultado que se conoce como regla de la cadena en funciones reales de una variable es simple y compacto; por el contrario, la regla general de la cadena en funciones escalares de

varias variables es bastante más compleja. Con el fin de facilitar su asimilación por el lector proponemos varias formas particulares y más sencillas de la regla de la cadena.

Teorema 3.9 (Regla de la cadena a lo largo de una curva)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en el interior de su dominio y $C \subset D$ un arco de curva parametrizado por las funciones diferenciables $x_i = x_i(t)$ con $t \in I$. Entonces la derivada de la función compuesta $f \circ \vec{\boldsymbol{x}}$ viene dada por

$$\frac{df\left(\vec{\boldsymbol{x}}\,(t)\right)}{dt} = \left\langle \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\,(t)\right), \vec{\boldsymbol{x}}'\,(t) \right\rangle,$$

donde $\vec{\boldsymbol{x}}'\,(t) = \left((x_1\,(t))', (x_2\,(t))', \cdots, (x_q\,(t))'\right)$.

Ejemplo 3.9 (El volumen del Universo y la regla de la cadena)

Suponga que el Universo es una «bola elipsoidal» cuyos semiejes son funciones del tiempo, que denotamos por $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$. Obtenga la velocidad $dV(t)/dt$ con la que aumenta el volumen del Universo. Si los semiejes del universo en el instante t_0 son $a(t_0) = 10^{10}$, $b(t_0) = 2\,10^{10}$ y $c(t_0) = 1/2\,10^{10}$, en unidades de años luz (a.l.) y crecen con una velocidad de 10^{-11} a.l./s., determine el valor numérico de $dV(t)/dt$.

El volumen de una bola elipsoidal con semiejes a, b y c viene dado por $V = \frac{4\pi abc}{3}$. La variación de los semiejes del Universo elipsoidal con el tiempo induce la variación del volumen del Universo con una velocidad que, según el teorema de la caden 3.9 , viene dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dV\,(t)}{dt} &= \frac{dV\,(\,a(t), b(t), c(t)\,)}{dt} \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial a}, \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial b}, \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial c} \right)\Bigg|_t, \left(\frac{da\,(t)}{dt}, \frac{db\,(t)}{dt}, \frac{dc\,(t)}{dt} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial a}\Bigg|_t \frac{da\,(t)}{dt} + \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial b}\Bigg|_t \frac{db\,(t)}{dt} + \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial b}\Bigg|_t \frac{db\,(t)}{dt}.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial a} = \frac{4\pi bc}{3}, \qquad \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial b} = \frac{4\pi ac}{3}, \qquad \frac{\partial V\,(\,a,b,c\,)}{\partial c} = \frac{4\pi ab}{3},$$

y que en el instante t_0

$$\frac{da\,(t_0)}{dt} = \frac{db\,(t_0)}{dt} = \frac{dc\,(t_0)}{dt} = 10^{-11},$$

resulta

$$\frac{dV\,(t_0)}{dt} = \frac{4\pi}{3}\left(10^{20} + \frac{1}{2}\,10^{20} + 2\,10^{20}\right) 10^{-11}(a.l.)^3/s = \frac{7\pi}{3}\,10^9(a.l.)^3/s.$$

Demostración 3.9

Consideremos dos puntos $\vec{\boldsymbol{x}}\,(t+h)$ y $\vec{\boldsymbol{x}}\,(t)$ tales que los dos y el segmento que los une están contenidos en el interior del dominio de la función f. El teorema del valor medio establece que existe un punto intermedio del segmento $\vec{\boldsymbol{\xi}}$ tal que

$$f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\,(t+h)\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\,(t)\right) = \left\langle \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{\xi}}\right), \left(\vec{\boldsymbol{x}}\,(t+h) - \vec{\boldsymbol{x}}\,(t)\right) \right\rangle.$$

Dividiendo ámbos miembros por el incremento h, tenemos

$$\frac{f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t+h\right)\right)-f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\right)}{h}=\left\langle\vec{\boldsymbol{\nabla}}f\left(\vec{\boldsymbol{\xi}}\right),\left(\frac{\vec{\boldsymbol{x}}\left(t+h\right)-\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)}{h}\right)\right\rangle,$$

y dado que cuando $h\to 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{\xi}} &\quad\to\quad \vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right),\\
\frac{\vec{\boldsymbol{x}}\left(t+h\right)-\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)}{h} &\quad\to\quad \vec{\boldsymbol{x}}'\left(t\right),\\
\frac{f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t+h\right)\right)-f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\right)}{h} &\quad\to\quad \frac{df\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\right)}{dt},
\end{aligned}$$

deducimos el resultado enunciado en el teorema, es decir,

$$\frac{df\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\right)}{dt}=\left\langle\vec{\boldsymbol{\nabla}}f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\right),\vec{\boldsymbol{x}}'\left(t\right)\right\rangle.$$

Teorema 3.10 (Una regla de la cadena en $\mathbb{R}^2$)

Sea $f\left(x,y\right)$ una función diferenciable en el interior de su dominio de definición D, y $x=x\left(u,v\right)$ e $y=y\left(u,v\right)$ dos funciones diferenciables de las variables u y v. Entonces las derivadas parciales de la función compuesta $z\left(u,v\right)=f\left(x\left(u,v\right),y\left(u,v\right)\right)$ son

$$\left(\frac{\partial z\left(u,v\right)}{\partial u},\ \frac{\partial z\left(u,v\right)}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x},\ \frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x\left(u,v\right)}{\partial u} & \dfrac{\partial x\left(u,v\right)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y\left(u,v\right)}{\partial u} & \dfrac{\partial y\left(u,v\right)}{\partial v}\end{pmatrix}$$

Efectuando de forma explícita el producto matricial obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas parciales

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z\left(u,v\right)}{\partial u}&=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\frac{\partial x\left(u,v\right)}{\partial u}+\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\frac{\partial y\left(u,v\right)}{\partial u},\\
\frac{\partial z\left(u,v\right)}{\partial v}&=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\frac{\partial x\left(u,v\right)}{\partial v}+\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\frac{\partial y\left(u,v\right)}{\partial v},
\end{aligned}$$

El diagrama que representamos a continuación muestra la estructura en «árbol» de la expresión precedente. El árbol se genera por «ramificación» de cada función a todas la variables de las que depende. Así, cada rama une una función con una de las variables que la determinan directamente. Por cada variable directa debe existir una rama y a cada rama le corresponde la derivada parcial de la función en la que se inicia la rama con respecto a la variable en la que finaliza. La sucesión de ramas del árbol que llevan desde la primera función hasta una variable final dada forman un camino al que le corresponde el producto de todas las derivadas parciales asociadas a sus ramas. La derivada parcial de $f\left(z\right)$ con respecto a una de las variables u o v es la suma de los productos de derivadas parciales asociados a los caminos que partiendo de $f\left(z\right)$ llegan a la variable correspondiente.

Ejemplo 3.10

Sea $u\left(x,y\right)$ una función diferenciable. Demuestre que bajo el cambio a coordenadas polares $x=r\cos\theta$ e $y=r\operatorname{sen}\theta$, se cumple que

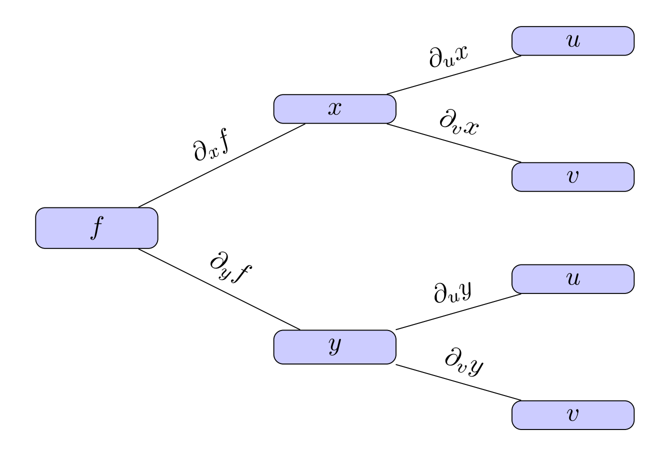


Figura 3.8: Diagrama en árbol de la regla de la cadena en $\mathbb{R}^2$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

La regla de la cadena nos permite relacionar las derivadas parciales de u con respecto a r y θ con las derivadas parciales con respecto a x e y. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \operatorname{sen}\theta, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\operatorname{sen}\theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\operatorname{sen}\theta, \\ \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta, \end{aligned}$$

donde hemos divido la segunda ecuación por r. El último paso consiste en elevar al cuadrado las dos ecuaciones y sumarlas con lo cual tenemos

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

Teorema 3.11 (Regla general de la cadena para funciones escalares)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable en el interior del conjunto* D *y cada una de las variables* $\vec{x}_i$*, que la determinan de forma directa, una función diferenciable*

$$x_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; \vec{u} \longrightarrow x_i\left(\vec{u}\right), \; i = 1, 2, \cdots q,$$

de las p *variables* $u_j, \; j = 1, 2, \cdots, p$*. Se cumple que las derivadas parciales de la función compuesta* $z = f\left(\vec{x}\left(\vec{u}\right)\right)$ *son*

$$\vec{\nabla} z\left(\vec{u}\right) = \vec{\nabla} f\left(\vec{x}\right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1\left(\vec{u}\right)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_1\left(\vec{u}\right)}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1\left(\vec{u}\right)}{\partial u_p} \\ \dfrac{\partial x_2\left(\vec{u}\right)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2\left(\vec{u}\right)}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2\left(\vec{u}\right)}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_q\left(\vec{u}\right)}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_q\left(\vec{u}\right)}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_q\left(\vec{u}\right)}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

En el siguiente diagrama representamos la estructura de «árbol» de la expresión precedente, definida de la misma forma que el el teorema 3.10

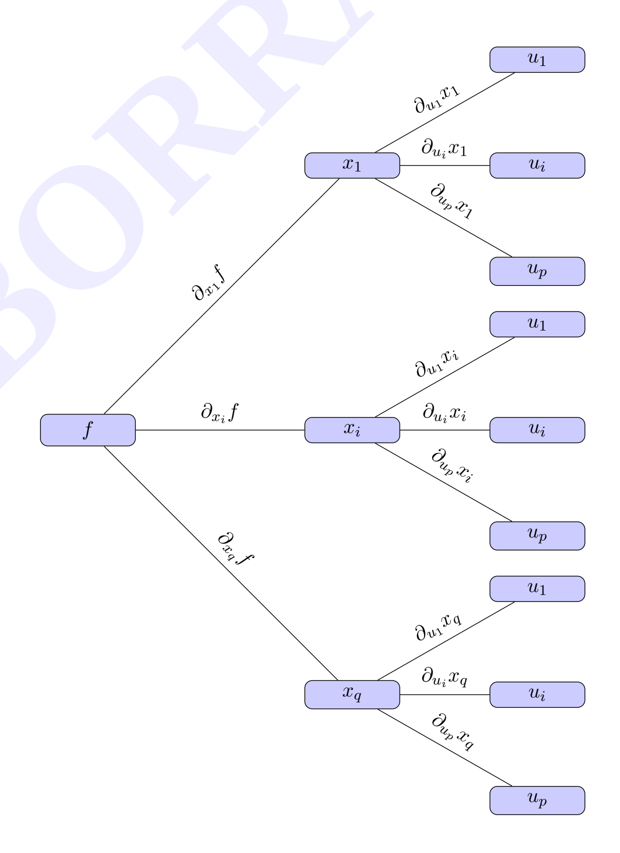


Figura 3.9: Diagrama en árbol de la regla de la cadena general

Esta estructura también es aplicable a funciones escalares de una variable real, tal como se

muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.11

Sea la función compuesta $z = f(y(x))$ donde z depende de y, que a su vez es función de x. Entonces, construyendo el árbol de dependencias tenemos

$$z \underbrace{\rightarrow}_{\frac{dz}{dy}} y \underbrace{\rightarrow}_{\frac{dy}{dx}} x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

que reconocemos inmediatamente como la regla de la cadena asociada a funciones de una variable real.



La regla de la cadena puede expresarse de forma más compacta introduciendo la notación $\mathbf{D}\vec{\boldsymbol{x}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right)$ para la matriz de derivadas parciales de las variables intermedias x_i con respecto a las variables finales u_j. De esta forma se escribe

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} z\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)\ \mathbf{D}\vec{\boldsymbol{x}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right).$$

3.6.3 Diferenciación implícita

Introduzcamos primero el problema de la diferenciación implícita en un caso particular para generalizarlo más tarde a un número cualquiera de variables. La ecuación

$$f(x, y, z) = 0,$$

define implícitamente una de las tres variables x, y y z en función de las otras dos. Supongamos que fuese posible despejar z como función de x e y, obteniéndose $z = z(x, y)$. Llegados a este punto el cálculo de las derivadas parciales de z sería inmediato. Si por el contrario no fuese posible obtener explícitamente z como función de las variables x e y sería deseable desarrollar un método para calcular las derivadas parciales de z sin necesidad de despejar dicha variable.

Supongamos que f es diferenciable y definamos $u_1 = x$ y $u_2 = y$. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Partiendo de estas fórmulas resulta trivial obtener las derivadas parciales de z con respecto a x e y, ya que

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}},$$
$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y}}{\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z}}.$$

siempre que $\dfrac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z} \neq 0$.

En general, la ecuación

$$f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_q\right) = 0,$$

define implícitamente una de las variables, x_q por ejemplo, en función de las restantes $q-1$ variables, es decir $x_q = x_q\left(x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}\right)$. Utilizando el mismo tipo de razonamiento que en el problema precedente encontramos que

$$\frac{\partial x_q\left(x_1, x_2, \cdots, x_{q-1}\right)}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_q}},\ k = 1, 2, \ldots, q-1.$$

Ejemplo 3.12

Sea la superficie S definida por la ecuación

$$x + y + z + 6xyz = 1$$

que define implícitamente z como función de x e y. Para hallar las derivadas parciales de z con respecto a estas dos variables definimos

$$f\left(x,y,z\right) = x + y + z + 6xyz - 1,$$

y aplicamos las expresiones encontradas en esta sección. Tenemos

$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial x} = 3x^2 + 6yz,$$
$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial y} = 3y^2 + 6xz,$$
$$\frac{\partial f\left(x,y,z\right)}{\partial z} = 3z^2 + 6xy.$$

Así

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy},$$
$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy},$$

expresiones válidas para cualquier punto (x,y,z) de la superficie S, si $z^2 + 2xy \neq 0$.



3.6.4 Funciones continuamente diferenciables

EL teorema 3.3 establece que la existencia de todas las derivadas parciales o direccionales de una función en un punto no garantiza que la función sea diferenciable en ese punto. El ejemplo 3.4 muestra un caso donde aparece dicho problema. Podemos plantearnos que condiciones deben satisfacer las derivadas parciales para que la función sea efectivamente diferenciable.

Teorema 3.12 (Funciones continuamente diferenciables)

Si una función $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el conjunto D es de clase C^1 en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$, entonces es diferenciable en $\vec{x}_0$. En este caso se dice que f es continuamente diferenciable en $\vec{x}_0$

El recíproco es falso: la diferenciabilidad de f en un punto $\vec{x}_0$ no garantiza que la función sea de clase C^1 en dicho punto.

Ejemplo 3.13

Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

verifica que:

1. Tiene derivadas parciales de primer orden continuas en $\mathbb{R}^2$.
2. Es diferenciable en todo el plano.

Solución:

1. $(x,y) \neq (0,0)$. Aplicando las reglas de derivación resulta

$$f'_x(x,y) = \frac{2xy^4}{(x+y)^2}\ ;\ f'_y(x,y) = \frac{2yx^4}{(x+y)^2}$$

Las dos derivadas parciales son funciones continuas ya que pueden obtenerse como suma, producto y cociente de funciones elementales continuas y los denominadores no se anulan puesto que $(x,y) \neq (0,0)$. Cuando $(x,y) = (0,0)$ debemos calcular las derivadas por aplicación directa de su definición

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} = 0, \\ f'_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^5} = 0. \end{aligned}$$

Para que las dos derivadas parciales sean continuas en el origen debe cumplirse que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_\alpha(x,y) = f'_\alpha(0,0)\,,\quad \alpha = x \text{ ó } y.$$

Empezamos con la derivada parcial con respecto a x

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x+y)^2} = 0 = f'_x(0,0)\,,$$

y por simetría

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f'_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2yx^4}{(x+y)^2} = 0 = f'_y(0,0),$$

con lo cual queda demostrado que f'_x y f'_y también son continuas en $\mathbb{R}^2$.

2. La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ debido a que es composición, suma, producto y cociente de funciones elementales diferenciables. Queda por estudiar si también lo es en el punto «conflictivo» $(0,0)$. Con el fin de responder a esta pregunta aplicamos la definición

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left\langle \vec{\nabla} f(0,0), (x,y) \right\rangle}{\sqrt{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x+y)^{3/2}},$$

y pasando a polares queda

$$L = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

En consecuencia f también es diferenciable en $(0,0)$.



3.6.5 Desarrollo finito de Taylor

Supongamos que la función f es diferenciable en un punto $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$. Entonces el polinomio de primer grado en las variables x_i

$$P_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \left\langle \vec{r}(\vec{x}_0), (\vec{x} - \vec{x}_0) \right\rangle,$$

proporciona una buena aproximación a los valores de la función cerca de $\vec{x}_0$, ya que

$$\frac{f(\vec{x}) - P_1(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0} 0.$$

El teorema de Taylor generaliza este resultado y nos proporciona aproximaciones de orden superior de los valores de la función cerca del punto $\vec{x}_0$. Pero antes de introducir el polinomio de Taylor para funciones de varias variables resulta conveniente definir las diferenciales de diverso orden de una función asociadas a un punto de su dominio.

Definición 3.3

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar diferenciable en el interior del dominio D; se define la diferencial (de primer orden) de f en el punto $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$ como la función lineal en la variable $\vec{h}$

$$\mathrm{d}f[\vec{x}_0]\left(\vec{h}\right) = \left\langle \vec{\nabla} f(\vec{x}_0), \vec{h} \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_i} h_i.$$

La definición de diferencial que acabamos de introducir nos permite reescribir la aproximación lineal $P_1(\vec{x})$ como

$$P_1(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \mathrm{d}f[\vec{x}_0]\left(\vec{h}\right).$$

Ejemplo 3.14

La diferencial de la función $f(x,y) = e^{xy}$ en un punto genérico de su dominio viene dada por

$$\mathrm{d}f[(x,y)](h_x,h_y) = \left\langle \overrightarrow{\nabla} f(x,y), (h_x,h_y) \right\rangle,$$

donde el gradiente, que ha sido calculado en el ejemplo 2.12 del tema 2, es

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = e^{xy}(y,x).$$

Por lo tanto

$$\mathrm{d}f[(x,y)](h_x,h_y) = e^{xy}\langle (y,x),(h_x,h_y)\rangle = e^{xy}(yh_x + xh_y).$$

Los valores de la función cerca del punto (x,y)

$$f(x+h_x, y+h_y) = e^{(x+h_x)(y+h_y)},$$

se pueden aproximar por

$$\begin{aligned} f(x+h_x, y+h_y) \simeq P_1(x+h_x, y+h_y) &= f(x,y) + \mathrm{d}f[(x,y)](h_x,h_y) \\ &= e^{xy} + e^{xy}(yh_x + xh_y). \end{aligned}$$

Ejercicio:

Obtenga el volumen del material necesario para construir un vaso cilíndrico cuyas dimensiones son las siguientes: (a) radio del cilindro interior, R; (b) altura del cilindro interior, H; y (c) espesor de las paredes y del fondo, K. Obtenga la solución exacta y una solución aproximada calculando el incremento del volumen del cilindro interior al incrementar su radio y altura en una cantidad K.

Las diferenciales de orden superior se definen como los siguientes polinomios en las componentes de la variable vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$.

Definición 3.4

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$; se llama diferencial de segundo orden de la función en el punto $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ al siguiente polinomio de orden dos en las componentes del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$

$$\mathrm{d}^2 f\left[\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right]\left(\overrightarrow{\boldsymbol{h}}\right) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} f^{(2)}_{x_i x_j}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) h_i h_j.$$

Análogamente, si f es de clase C^n en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ llamamos diferencial de orden n en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ a

$$\mathrm{d}^n f\left[\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right]\left(\overrightarrow{\boldsymbol{h}}\right) = \sum_{i_1=1}^{q}\cdots\sum_{i_n=1}^{q} f^{(n)}_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) h_{i_1}\ldots h_{i_n}.$$

Observese que la diferencial de orden n de una función C^n es un polinomio homogéneo de orden n en las componentes del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$. Como consecuencia de esta propiedad se cumple que

$$\mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\lambda\vec{h}\right)=\lambda^n \mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right),$$

En efecto, aplicando la definición

$$\mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\lambda\vec{h}\right)=\sum_{i_1=1}^{q}\cdots\sum_{i_n=1}^{q} f^{(n)}_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}\left(\vec{x}_0\right)\left(\lambda h_{i_1}\right)\dots\left(\lambda h_{i_n}\right),$$

de manera que sacando factor común los factores λ

$$\mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\lambda\vec{h}\right)=\lambda^n\sum_{i_1=1}^{q}\cdots\sum_{i_n=1}^{q} f^{(n)}_{x_{i_1}\dots x_{i_n}}\left(\vec{x}_0\right)h_{i_1}\dots h_{i_n}=\lambda^n \mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right).$$

Ejemplo 3.15

Veamos algunos casos particulares que clarifiquen la definición anterior. Dada la función $y=f(x)$, definida en la recta real, su diferencial de segundo orden es

$$\mathrm{d}^2 f\left[x_0\right](h)=f^{(2)}\left(x_0\right)h.$$

En el caso de una función de dos variables $z=f(x,y)$ la diferencial de segundo orden es un polinomio de grado dos en las componentes de $\vec{h}$, es decir

$$\mathrm{d}^2 f\left[(x_0,y_0)\right](h_x,h_y)=f^{(2)}_{x}(x_0,y_0)h_x+2f^{(2)}_{xy}(x_0,y_0)h_x h_y+f^{(2)}_{y}(x_0,y_0)h_y,$$

y en forma matricial

$$\mathrm{d}^2 f\left[(x_0,y_0)\right](h_x,h_y)=(h_x,h_y)\begin{pmatrix} f^{(2)}_{x}(x_0,y_0) & f^{(2)}_{xy}(x_0,y_0)\\ f^{(2)}_{xy}(x_0,y_0) & f^{(2)}_{y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_x\\ h_y\end{pmatrix}.$$

Ya podemos enunciar el teorema de Taylor. Daremos primero una versión parcial que relaciona el valor de la función en $\vec{x}_0+\vec{h}$ con el valor de la función y de sus derivadas parciales de primer y segundo orden evaluadas en $\vec{x}_0$

Teorema 3.13 (Teorema de Taylor de segundo orden)

Sea $f: D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ una función escalar de clase C^2 en el punto $\vec{x}_0\in\mathring{D}$; entonces se cumple que

$$f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)=f\left(\vec{x}_0\right)+\mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right)+o\left(\left\|\vec{h}\right\|^2\right).$$

El polinomio de orden dos en las variables $h_1,\dots,h_q$

$$P_2\left(\vec{h}\right)=f\left(\vec{x}_0\right)+\mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right)+\frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right),$$

se denomina polinomio de Taylor de orden dos asociado a la función f en el punto $\vec{x}_0$.

Utilizando la definición de las diferenciales de la función en términos de sus derivadas parciales y de las componentes del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$, el polinomio de Taylor se escribe

$$P_2\left(\overrightarrow{\boldsymbol{h}}\right) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) + \sum_{i=1}^{q} f'_{x_i}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} f^{(2)}_{x_i x_j}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) h_i h_j.$$

El siguiente ejemplo particulariza esta expresión para funciones definidas en el plano.

Ejemplo 3.16 (Fórmula de Taylor en $\mathbb{R}^2$)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en el plano con valor $f\left(x_0, y_0\right)$ y derivadas $f'_\alpha\left(x_0, y_0\right)$ y $f''_{\alpha\beta}\left(x_0, y_0\right)$ en el punto (x_0, y_0). Entonces el valor que la función toma en el punto $(x_0 + h_x, y_0 + h_y)$ se escribe

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + h_x, y_0 + h_y\right) &= f\left(x_0, y_0\right) + f'_x\left(x_0, y_0\right) h_x + f'_y\left(x_0, y_0\right) h_y \\ &+ \frac{1}{2}\left\{ f^{(2)}_x\left(x_0, y_0\right) h_x + f^{(2)}_y\left(x_0, y_0\right) h_y + 2 f^{(2)}_{xy}\left(x_0, y_0\right) h_x h_y \right\} \\ &+ \boldsymbol{o}\left(\left\|(h_x, h_y)\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Ejercicio:

Utilice el desarrollo de Taylor de orden dos alrededor del origen para escribir de forma aproximada la función

$$f\left(x, y\right) = e^{x+y}.$$

Calcule entonces de forma exacta y de forma aproximada el valor $f\left(0.1, 0.1\right)$ *y compare ambos resultados.*

Demostración 3.13

Antes de deducir la forma de la aproximación de Taylor de orden n repasaremos el teorema de Taylor para funciones de una variable. Para funciones suaves de una variable $g : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este teorema asegura que si la función tiene sus n primeras derivadas continuas en $x = a$ [1]

$$g\left(a + h\right) = g\left(a\right) + g'\left(a\right) h + \frac{1}{2!} g''\left(a\right) h^2 + \cdots + \frac{1}{n!} g^{(n)}\left(a\right) h^n + R_n\left(a, h\right),$$

donde la cantidad $R_n\left(a, h\right)$ recibe el nombre de residuo. Podemos demostrar que en las proximidades de a el residuo toma valores muy pequeños. De las diversas expresiones que existen para el residuo, la más útil para nosotros se escribe como

$$R_n\left(a, h\right) = \frac{h^n}{n!}\left(g^{(n)}\left(\zeta\right) - g^{(n)}\left(a\right)\right),$$

donde $\zeta \in (a, a + h)$. Esta expresión está íntimamente relacionada con la fórmula de Lagrange del residuo, que es mucho más conocida. Obsérvese que se cumple que

$$\frac{R_n\left(a, h\right)}{h^n} = \frac{1}{n!}\left(g^{(n)}\left(\zeta\right) - g^{(n)}\left(a\right)\right) \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Admitamos, por el momento, que f es de clase C^2 en su dominio y definamos la siguiente función de una variable

$$g\left(t\right) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 + t\overrightarrow{\boldsymbol{h}}\right),$$

[1] Para ello basta con existan las $n + 1$ primeras derivadas en $x = a$.

cuyas derivadas se obtienen aplicando la regla de la cadena. Como la función f es de clase C^2 la regla de la cadena es válida tanto para f como para sus derivadas parciales de primer orden. Por lo tanto podemos escribir que

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{i=1}^{q} f'_{x_i}\left(\vec{x}_0 + t\vec{h}\right) h_i &&= \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0 + t\vec{h}\right]\left(\vec{h}\right), \\ g''(t) &= \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} f''_{x_i x_j}\left(\vec{x}_0 + t\vec{h}\right) h_i h_j &&= \mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0 + t\vec{h}\right]\left(\vec{h}\right), \end{aligned}$$

y, en particular, cuando $t = 0$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right), \\ g''(0) &= \mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right). \end{aligned}$$

Estas expresiones so igualmente válidas aunque la función f sólo sea de clase C^2 en el punto $\vec{x}_0$. Aplicando la fórmula de Taylor a la función g cuando $t = 1$ obtenemos

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + R_2(0,1),$$

y substituyendo g por su definición y sus primeras derivadas por las expresiones anteriores, resulta

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + R_2(0,1).$$

Ahora bien, el residuo puede escribirse como

$$R_2(0,1) = \frac{1}{2}\left(g''(\zeta) - g''(0)\right) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\left(f''_{x_i x_j}\left(\vec{x}_0 + \zeta\vec{h}\right) - f''_{x_i x_j}\left(\vec{x}_0\right)\right) h_i h_j,$$

donde ζ es un número comprendido entre cero y uno. Además, como $|h_i| \leq \left\|\vec{h}\right\|$, resulta

$$R_2(0,1) \leq K \left\|\vec{h}\right\|^2,$$

con

$$K = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q}\left|f''_{x_i x_j}\left(\vec{x}_0 + \zeta\vec{h}\right) - f''_{x_i x_j}\left(\vec{x}_0\right)\right|.$$

Por lo tanto se verifica que

$$\frac{R_2(0,1)}{\left\|\vec{h}\right\|^2} \leq K \xrightarrow{\vec{h}\to 0} 0,$$

es decir

$$R_2(0,1) = \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|^2\right).$$

De esta forma llegamos al resultado que buscabamos

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|^2\right).$$

El teorema de Taylor de orden n es una generalización inmediata del anterior en la que el polinomio aproximante involucra todas las derivadas parciales de la función hasta orden n.

Teorema 3.14 (Teorema de Taylor)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalar de clase C^n en el punto $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$; entonces se cumple que

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + o\left(\left\|\vec{h}\right\|^n\right).$$

El polinomio de orden n en las variables $h_1, \ldots, h_q$

$$P_T\left(\vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\mathrm{d}^n f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right),$$

se denomina polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto $\vec{x}_0$.

Para finalizar la sección, y a modo de resumen, incluimos un diagrama de flujo con las relaciones entre los resultados más importantes de este tema

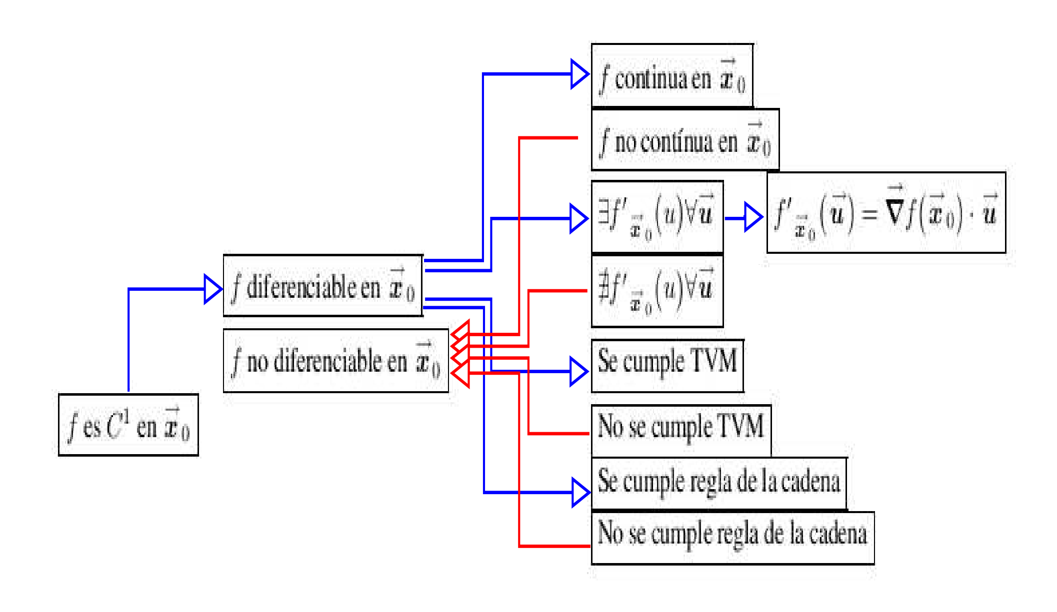


Figura 3.10: Diagrama de flujo

Problemas


Problema 3.1 Analice la continuidad y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy-2x^4}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$


Problema 3.2 Estudie la continuidad de las derivadas parciales primeras y la diferenciabilidad de las funciones que se proponen a continuación:

1.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

2.
$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x+y}\right) & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$


Problema 3.3 Dada la función $f(x,y,z)=axz+bxy+cz$, determine los valores de las constantes a,b,c para que la derivada direccional de f en el punto $\vec{r}_0=(1,1,1)$ sea máxima en la dirección $\vec{v}_0=(-1,1,0)$ y su valor sea 2.


Problema 3.4 La intensidad de luz visible en una región del plano que contiene el punto $(-2,1)$ viene dada por la función $I(x,y)=A-2x-y$. Determine la trayectoria que debe seguir una pequeña forma de vida fotófaga (que se "alimenta de luz"), que en el instante incial se encuentra en el punto $(-2,1)$, de manera que la cantidad de alimento conseguido sea máxima.


Problema 3.5 Determine la trayectoria de descenso más acusado situada sobre la superficie $z=x^2+3y^2$ y que parte del punto: (a) $(1,1,4)$ y (b) $(1,-2,13)$.


Problema 3.6 Determine la forma de la función f si $\vec{\nabla} f(x,y,z)=a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{k}$ para todo (x,y,z).


Problema 3.7 Halle la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $(x+y)-4=x-y+sen(z)$ en el punto con $x=1$ e $y=1$.


Problema 3.8 La curva parametrizada por $\vec{r}(t)=(2t,3/t,-2t^2)$ corta al elipsoide de ecuación $x^2+y^2+3z^2=25$ en el punto $(2,3,-2)$. Determine el ángulo de intersección.


Problema 3.9 Utilizando que la variable z está definida como función implícita de las variables x e y mediante la ecuación $e^z+xz+cos(xy)=0$, halle las derivadas parciales de z con respecto a ambas variables.


Problema 3.10 La ecuación de estado de los gases perfectos es $PV-nRT=0$, donde R es la constante de los gases ideales. Demuestre por diferenciación implícita y explícita que:

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{P}{V},$$

$$\frac{\partial P}{\partial T}=\frac{nR}{V}.$$


Problema 3.11 En los libros de termodinámica aparecen expresiones del tipo

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)=-1$$

Explique el significado de esta relación y demuestre que es verdadera.



Problema 3.12 Obtenga la forma del gradiente de una función $f\,(r)$, siendo $r = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right|$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)$. Utilizando el resultado anterior calcule $\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}V$ para $V\,(r) = \dfrac{K}{r}$ donde K es una constante.



Problema 3.13 Desarrolle en serie de Taylor a segundo orden las siguientes funciones:

1. $f\,(x, y) = e^{xy}\cos(x + y)$ en torno al punto $(1, 2)$.



2. $f\,(x, y) = \displaystyle\int_0^{x+2y} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ en torno al origen de coordenadas. 

Tema 4

Funciones vectoriales

4.1 Definición de las funciones vectoriales

Las funciones que hemos estudiado hasta el momento son funciones escalares. Es posible, sin embargo, introducir funciones cuya imagen está formada por vectores. Son especialmente útiles para describir curvas y superficies en geometría, el movimiento de sistemas de partículas o caracterizar el campo electromagnético en física.

Como ya hemos definido en los temas precedentes, una función es una regla que a cada elemento de su dominio de definición le asocia un elemento (y sólo uno) de la imagen. Así, una función real vectorial es una regla que asocia a cada elemento de su dominio en $\mathbb{R}^q$ un elemento de $\mathbb{R}^p$, donde p y q son números naturales cualesquiera.

Definición 4.1 (Función vectorial)

Una aplicación o regla

$$\overrightarrow{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p \; ; \; \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D \longrightarrow \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\varphi_1\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right), \cdots, \varphi_p\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)\right),$$

se denomina función vectorial de q variables reales. Los conjuntos D y $\left\{\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \;\backslash.\; \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D\right\}$ reciben el nombre de dominio de definición e imagen de $\overrightarrow{\varphi}$.

Las q componentes $x_1, x_2, \ldots, x_q$ del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}$ reciben el nombre de variables independientes y las p funciones escalares $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi_i}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right),\; i = 1, 2, \ldots, p\right\}$ se denominan funciones componente de $\overrightarrow{\varphi}$.

Dado que los valores de la función son vectores podemos caracterizarlos dando su descomposición en una base. Utilizando la base estándar resulta

$$\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\varphi_1\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right), \varphi_2\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right), \cdots, \varphi_p\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)\right) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \overrightarrow{\boldsymbol{e_i}}.$$

En el caso de funciones vectoriales de una sola variable utilizamos normalmente el símbolo t para denotar la variable independiente; la razón es que en la mayor parte de las aplicaciones físicas dicha variable representa el tiempo.

Ejemplo 4.1 (Dominio de una función vectorial)

Sea la función vectorial $\overrightarrow{\varphi}(t) = \left(t^3, \log(1+t), \operatorname{sen}(t)\right)$. Sus funciones componentes son

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= t^3, \\
\varphi_2(t) &= \log(1+t), \\
\varphi_3(t) &= \operatorname{sen}(t)
\end{aligned}
$$

Si empleamos el símbolo D_i para referirnos al dominio de definición de la i-ésima función componente, el dominio de definición global vendrá dado por $D = \cap_{i=1}^{q} D_i$, es decir, por la intersección de los dominios de definición de las diferentes componentes. En el ejemplo actual los dominios de definición de las tres funciones componentes se escriben como

$$
D_1 = \mathbb{R}, \quad D_2 = \{t \in \mathbb{R} \ \backslash. \ t > -1\}, \quad D_3 = \mathbb{R},
$$

de manera que $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{t \in \mathbb{R} \ \backslash. \ t > -1\} = (-1, \infty)$.



Ejemplo 4.2 (Campo de velociadades de un fluido)

Para especificar la velocidad de un fluido que se mueve en el espacio se requiere una función vectorial

$$
\vec{\boldsymbol{V}} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ ; \ (x, y, z, t) \longrightarrow \vec{\boldsymbol{V}}\,(x, y, z, t)\,,
$$

donde $\vec{\boldsymbol{V}}\,(x, y, z, t)$ representa la velocidad de una pequeña partícula de fluido que en el instante t de tiempo se halla en la posición (x, y, z).

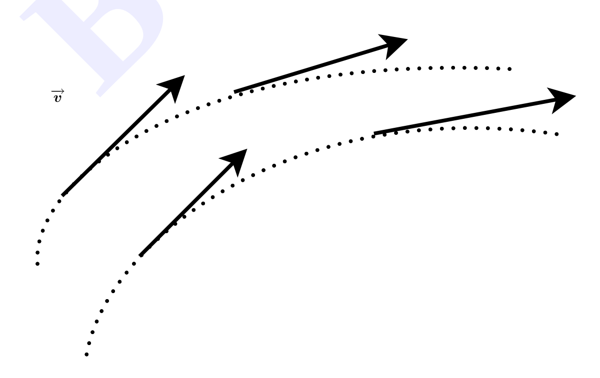


Figura 4.1: Campo de velocidades en el plano

En diversas disciplinas como la geometría y la física muchas funciones vectoriales surgen de forma natural como resultado de distintas operaciones con otras funciones vectoriales. De hecho, la suma vectorial, el producto por un escalar, el producto escalar, el producto vectorial y

la composición de funciones permiten generar funciones más complejas.

Definición 4.2 (Operaciones aritméticas elementales)

Dadas dos funciones vectoriales $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $\vec{\phi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y una función escalar* $u\left(\vec{x}\right)$ *con dominio* $D \subset \mathbb{R}^q$*, convenimos en introducir las siguientes funciones definidas en* D*:*

1. $\left[\vec{\varphi} + \vec{\phi}\right]\left(\vec{x}\right) = \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) + \vec{\phi}\left(\vec{x}\right)$ *[Suma],*
2. $\left[u\vec{\varphi}\right]\left(\vec{x}\right) = u\left(\vec{x}\right)\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right)$ *[Producto por un escalar],*
3. $\left[\left\langle\vec{\varphi}, \vec{\phi}\right\rangle\right]\left(\vec{x}\right) = \left\langle\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right), \vec{\varphi}\left(\phi\right)\vec{x}\right\rangle$ *[Producto escalar],*
4. *Para* $p = 3$ *podemos definir la función producto vectorial*

$$\left[\vec{\varphi} \times \vec{\phi}\right]\left(\vec{x}\right) = \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) \times \vec{\phi}\left(\vec{x}\right).$$

Dadas dos funciones vectoriales $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $\vec{\phi} : E \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, es posible definir su composición* $\vec{\psi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *como*

$$\vec{\psi}\left(\vec{x}\right) = \vec{\phi} \circ \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) = \vec{\phi}\left(\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right)\right),$$

siempre que $\vec{\varphi}\left(D\right) \subset E$*.*

4.2 Continuidad y diferenciabilidad de las funciones vectoriales

En esta sección generalizamos las definiciones de límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad al caso de funciones con valores vectoriales.

4.2.1 Límites y continuidad de las funciones vectoriales

Los conceptos de límite y continuidad son completamente análogos a los que hemos introducido en el tema anterior. Así, empleamos la notación

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) = \vec{L} \text{ ó } \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) \xrightarrow{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{L},$$

para indicar que los valores vectoriales de la función se aproximan a $\vec{L}$ cuando el punto $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$, cualquiera que sea la trayectoria de aproximación. Es decir, podemos hacer que los valores $\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right)$ se aproximen a $\vec{L}$ tanto como se quiera tomando el punto $\vec{x}$ suficientemente próximo a $\vec{x}_0$, con la única restricción que $\vec{x} \neq \vec{x}_0$. Si $\vec{L} = \left(L_1, L_2, \cdots, L_q\right)$ deberá ocurrir que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \varphi_i\left(\vec{x}\right) = L_i, \ i = 1, 2, \ldots p.$$

También es cierto que si $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) = \vec{L}$, la longitud del vector $\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) - \vec{L}$ tiende a cero a medida que $\vec{x}$ se aproxima a $\vec{x}_0$. Cualquiera de estas condiciones sirve para definir el límite de una función vectorial.

Definición 4.3 (Límite de una función vectorial)

Dada $\overrightarrow{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *una función vectorial definida en* $D \subset \mathbb{R}^q$ *y* $\overrightarrow{x}_0 \in \overline{D}$ *un punto de la adherencia del mismo, definimos*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) \triangleq \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \varphi_1\left(\overrightarrow{x}\right), \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \varphi_2\left(\overrightarrow{x}\right), \cdots, \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \varphi_p\left(\overrightarrow{x}\right) \right),$$

siempre que existan los límites de todas las funciones componentes.

Ejemplo 4.3 (Límite de una función vectorial)

Dada la función vectorial $\overrightarrow{r}(t) = (1+t^2)\overrightarrow{\imath} + te^t\overrightarrow{\jmath} + \mathrm{sen}(t)/t\,\overrightarrow{k}$ determine su dominio de definición D y calcule a continuación el límite de la misma en un punto t_0 cualquiera de D.

Si llamamos D_i al dominio de cada una de las componentes de la función vectorial tenemos que $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3$. En el caso que nos ocupa: $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $D_3 = \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$. Calculemos el límite en el punto $t_0 = 1 \in D$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 1} \overrightarrow{r}(t) &= \left[\lim_{t\to 1}(1+t^3)\right]\overrightarrow{\imath} + \left[\lim_{t\to 1} te^t\right]\overrightarrow{\jmath} + \left[\lim_{t\to 1}\frac{sen(t)}{t}\right]\overrightarrow{k} \\ &= 2\overrightarrow{\imath} + \frac{1}{e}\overrightarrow{\jmath} + sen(1)\overrightarrow{k}. \end{aligned}$$

Frecuentemente se encuentra en la literatura la siguiente definición de límite, equivalente a la que hemos dada más arriba.

Teorema 4.1

Sea $\overrightarrow{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *una función vectorial definida en el dominio real* D *y* $\overrightarrow{x}_0 \in D'$ *un punto de acumulación del mismo, se cumple entonces que*

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{L} \leftrightarrow \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \left\| \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{L} \right\| = 0.$$

Demostración 4.1

- Para demostrar la condición necesaria partimos de la definición original de límite, es decir

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{L} \Rightarrow \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \varphi_i\left(\overrightarrow{x}\right) = L_i.$$

Ahora bien, la norma de un vector es un escalar y $\left\| \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{L} \right\|$ es una función real escalar de las variables $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$; por las propiedades de las funciones escalares tenemos

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \left\| \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{L} \right\|^2 = \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \left\| \overrightarrow{\varphi}(t) - \overrightarrow{L} \right\| \right)^2,$$

de manera que podemos calcular primero el límite de la norma al cuadrado para extraer después la raiz. Se verifica entonces

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(\vec{x})-\vec{L}\right\|^2=\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left[\sum_{i=1}^{p}(\varphi_i(\vec{x})-L_i)^2\right]=\sum_{i=1}^{p}\left[\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}(\varphi_i(\vec{x})-L_i)\right]^2,$$

y como $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varphi}(\vec{x})=\vec{L}$ resulta que

$$\to\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x})=L_i\to\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}(\varphi_i(t)-L_i)=0,$$

con lo cual

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(\vec{x})-\vec{L}\right\|^2=0\longrightarrow\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(\vec{x})-\vec{L}\right\|=0.$$

- Se trata ahora de probar que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(t)-\vec{L}\right\|=0,$$

es condición suficiente para que se cumpla la definición de límite.

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(\vec{x})-\vec{L}\right\|^2=\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left(\sum_{i=1}^{p}\varphi_i(\vec{x})-L_i\right)^2=\sum_{i=1}^{p}\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x})-L_i\right)^2.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la condición inicial resulta que

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x})-L_i\right)^2=0,$$

y para que la suma de cuadrados sea nula todos y cada uno de los sumandos deben ser cero. Así

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(t)-\vec{L}\right\|=0\longrightarrow\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x})=L_i,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varphi}(\vec{x})=\vec{L}.$$

Teorema 4.2 (Propiedades aritméticas de los límites)

Sean $\vec{\varphi}:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}^p$ *y* $\vec{\phi}:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}^p$ *dos funciones vectoriales y* $u(\vec{x})$ *una función escalar definidas en* D. *Si* $\vec{x}_0\in D'$ *y* $\vec{\varphi}(\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{L}$, $\vec{\phi}(\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{M}$ *y* $u(\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}c$, *se cumple que:*

1. $\left[\vec{\varphi}+\vec{\phi}\right](\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{L}+\vec{M}$,
2. $[u\vec{\varphi}](\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}c\vec{L}$,
3. $\left[\left\langle\vec{\varphi},\vec{\phi}\right\rangle\right](\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\langle\vec{L},\vec{M}\right\rangle$,
4. $\left[\vec{\varphi}\times\vec{\phi}\right](\vec{x})\xrightarrow{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{L}\times\vec{M}$ $(q=3)$.

Demostración 4.2

La demostración de estas propiedades no presenta dificultad alguna si se parte de la definición de límite como límite de las funciones componente. Nos limitaremos a dar la demostración de la primera de ellas, dejando las demás como problemas o ejercicios para el lector. Teniendo en cuenta las definiciones de función suma y de límite podemos escribir

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left[\vec{\varphi}+\vec{\phi}\right](\vec{x}) &= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left[\vec{\varphi}(\vec{x})+\vec{\phi}(\vec{x})\right] = \sum_{i=1}^{p}\left(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left[\varphi_i(x)+\phi_i(\vec{x})\right]\right)\vec{e}_i \\
&= \sum_{i=1}^{p}\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x})\,\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{p}\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\phi_i(\vec{x})\,\vec{e}_i \\
&= \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varphi}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{L}+\vec{M}.
\end{aligned}$$

El estudio del límite cuando $\vec{x}$ se aproxima a $\vec{x}_0$ nos permite explorar el comportamiento de la función en una vecindad de $\vec{x}_0$, tan pequeña como se quiera, pero que excluye el punto central $\vec{x}_0$ y por tanto nada nos dice sobre el valor de la función en dicho punto. La relación entre el límite de la función y el valor de la misma en el punto $\vec{x}_0$ es la base de la idea de continuidad.

Definición 4.4 (Continuidad de una función vectorial)

Una función vectorial $\vec{\varphi}(\vec{x})$ *definida en el dominio real* D *es continua en* $\vec{x}_0 \in \overline{D}$ *si se cumple que*

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{\varphi}(\vec{x}_0)\,.$$

Por extensión se dice que una función vectorial es continua en su dominio D *si es continua en todos los puntos del mismo.*

Resulta conveniente realizar algunos comentarios que permitan comprender mejor la definición precedente:

- De la definición deducimos inmediatamente que una función vectorial es continua si y sólo si todas sus componentes son funciones escalares continuas, es decir,

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{\varphi}(\vec{x}) = \vec{\varphi}(\vec{x}_0) \leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\varphi_i(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x}_0)\,.$$

- La condición de continuidad puede expresarse como

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\left\|\vec{\varphi}(\vec{x})-\vec{\varphi}(\vec{x}_0)\right\| = 0.$$

  Por lo tanto si una función $\vec{\varphi}$ es continua en su dominio de definición (o en un subconjunto del mismo) podemos situar los extremos de los vectores $\vec{\varphi}(\vec{x}_1)$ y $\vec{\varphi}(\vec{x}_2)$ tan próximos como se quiera permitiendo que $\vec{x}_1$ se aproxime suficientemente a $\vec{x}_2$.

- Observese también que la definición de continuidad que hemos introducido involucra no sólo al dominio de la función , sino también a su frontera. Si la función no esta definida en un punto de la frontera decimos que posee una discontinuidad en dicho punto.

Ejemplo 4.4 (Un primer ejemplo de continuidad de una función vectorial)

Estudie la continuidad de la función vectorial

$$\vec{\varphi}\,(x,y) = (\varphi_x\,(x,y)\,,\varphi_y\,(x,y)) = \left(\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x-y}, \frac{e^x - e^{-y}}{x+y}\right),$$

definida en $\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \backslash.\ x^2 \neq y^2\right\}$. ¿Puede extenderse la definición de $\vec{\varphi}\,(x,y)$ de manera que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

La continuidad de $\vec{\varphi}$ en su dominio Δ resulta evidente a partir de la definición de sus componentes. $\varphi_x\,(x,y)$ es continua en todos los puntos del plano con $x \neq y$, mientras que $\varphi_y\,(x,y)$ lo es siempre que $x \neq -y$.

Para poder redefinir la función de manera que sea continua en todo $\mathbb{R}^2$ es necesario que exista el límite de $\varphi_x\,(x,y)$ en los puntos de la forma (x_0,x_0) y el de $\varphi_y\,(x,y)$ en puntos como $(x_0,-x_0)$.

En el primer caso efectuamos el siguiente cambio $x = x_0+\tilde{x}$, $y = y_0+\tilde{y}$, de manera que $\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \equiv \lim_{\tilde{x},\tilde{y}\to(0,0)}$. Así

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \varphi_x\,(x,y) = \lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \varphi_x\,(x,y) \lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x_0+\tilde{x}) - \operatorname{sen}(x_0+\tilde{y})}{\tilde{x}-\tilde{y}},$$

y efectuando un desarrollo en serie del numerador, resulta

$$\operatorname{sen}(x_0+\tilde{x}) - \operatorname{sen}(x_0+\tilde{y}) = 2\cos(x_0)(\tilde{x}-\tilde{y}) + \dots,$$

por lo que podemos escribir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \varphi_x\,(x,y) = \lim_{(\tilde{x},\tilde{y})\to(0,0)} \cos x_0 \frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}} + \cdots = \cos x_0.$$

Procediendo de forma similar encontramos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} \varphi_y\,(x,y) = e^{x_0},$$

con lo cual deberemos definir $\varphi_x\,(x,x) = \cos x$ y $\varphi_y\,(x,-x) = e^x$ para que $\vec{\varphi}$ esté definida y sea continua en $\mathbb{R}^2$.

Las propiedades de los límites enumeradas en el teorema 4.2 conducen de forma inmediata a que las funciones con valores vectoriales continuas satisfacen las siguientes propiedades.

Teorema 4.3 (Propiedades de las funciones continuas)

Sean $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $\vec{\phi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $u : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones vecoriales y una función escalar definidas en el domonio* D*. Si las tres funciones son continuas en* $\vec{x}_0 \in D$ *se verifica que*

$$\left[\vec{\varphi} + \vec{\phi}\right](\vec{x}), \quad [u\vec{\varphi}]\,(\vec{x}), \quad \left[\left\langle \vec{\varphi}, \vec{\phi} \right\rangle\right](\vec{x}), \quad \left[\vec{\varphi} \times \vec{\phi}\right](\vec{x})\ (q=3),$$

son continuas en $\vec{x}_0$.

4.2.2 Diferenciabilidad de las funciones vectoriales

Hasta ahora hemos utilizado nuestro conocimiento previo sobre las funciones escalares para introducir los conceptos de límite y continuidad de una función vectorial. En este caso seguiremos una aproximación diferente y no nos basaremos en la diferenciabilidad de las funciones

componente para definir la de la función vectorial. Por ello definiremos la derivada parcial de una función vectorial como el límite de un cociente incremental vectorial y deduciremos después su relación con las derivadas de las funciones componentes.

Consideremos, para fijar ideas, una función vectorial $\overrightarrow{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\overrightarrow{\varphi}(x, y) = (\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)).$$

Teniendo en cuenta la definición de derivada parcial de una función escalar, dada en el tema 2, procederemos de forma similar y definiremos las derivadas parciales de $\overrightarrow{\varphi}(x, y)$ como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{\partial x} &\triangleq \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_x \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\varphi}((x_0, y_0) + h\,\overrightarrow{\imath}) - \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{h}, \\ \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{\partial y} &\triangleq \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_y \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\varphi}((x_0, y_0) + h\,\overrightarrow{\jmath}) - \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\frac{\Delta_x \overrightarrow{\varphi}((x_0, y_0))}{h} = \left(\frac{\varphi_x(x_0 + h, y_0) - \varphi_x(x_0, y_0)}{h}, \frac{\varphi_y(x_0 + h, y_0) - \varphi_y(x_0, y_0)}{h} \right),$$

y al considerar el límite cuando $h \to 0$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{\partial x} &= \left(\lim_{h \to 0} \frac{\varphi_x(x_0 + h, y_0) - \varphi_x(x_0, y_0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{\varphi_y(x_0 + h, y_0) - \varphi_y(x_0, y_0)}{h} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi_x(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_y(x_0, y_0)}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Procediendo de forma análoga se llega a que

$$\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}(x_0, y_0)}{\partial y} = \left(\frac{\partial \varphi_x(x_0, y_0)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_y(x_0, y_0)}{\partial y} \right).$$

Por lo tanto, aunque hemos definido las derivadas parciales de $\overrightarrow{\varphi}(x, y)$ de forma directa como límites de un cociente incremental, obtenemos el resultado habitual que en este caso se expresaría del siguiente modo: el vector derivada parcial de una función está formado por las derivadas parciales de sus funciones componente.

Utilizando los resultados de este ejemplo convenimos en definir las derivadas parciales de una

función vectorial general como

Definición 4.5 (Derivada parcial de una función vectorial)

Sea $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *una función escalar definida en el dominio* $D \subset \mathbb{R}^q$*. Definimos la derivada parcial de* $\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right)$ *en el punto* $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$ *con respecto a la variable* x_i *como*

$$\frac{\partial \vec{\varphi}\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i} \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{\vec{\varphi}\left(\vec{x}_0 + h\vec{e}_i\right) - \vec{\varphi}\left(\vec{x}_0\right)}{h},$$

siempre que dicho límite exista, o de forma equivalente

$$\frac{\partial \vec{\varphi}\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i} \triangleq \left(\frac{\partial \varphi_{x_1}\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_{x_2}\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial \varphi_{x_q}\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}\right),$$

si las funciones componente son derivables parcialmente.

Ejemplo 4.5 (Cálculo de las derivadas parciales)

Sea $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por la ecuación $\vec{\varphi}(x, y) = (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, e^{xy})$. Según la definición precedente sus derivadas parciales vienen dadas por

$$\frac{\partial \vec{\varphi}(x, y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\partial x}, \frac{\partial e^{xy}}{\partial x}\right) = (\cos x \operatorname{sen} y, ye^{xy}),$$

y

$$\frac{\partial \vec{\varphi}(x, y)}{\partial y} = \left(\frac{\partial \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\partial y}, \frac{\partial e^{xy}}{\partial y}\right) = (\operatorname{sen} x \cos y, xe^{xy}).$$

El hecho de que una función escalar sea diferenciable en cierto punto está asociado a la existencia de una aproximación lineal razonable de la función en las proximidades de dicho punto. Dado que la definición de diferenciabilidad de las funciones vectoriales sigue la misma avenida, conviene clarificar lo que entendemos por una función vectorial lineal.

Una función vectorial lineal $\vec{l} : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ posee componentes de la forma

$$l_i\left(\vec{x}\right) = a_i + b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{iq}x_q, \; i = 1, 2, \dots, p,$$

por lo que podemos expresarla en notación matricial como

$$\begin{pmatrix} l_1\left(\vec{x}\right) \\ l_2\left(\vec{x}\right) \\ \vdots \\ l_p\left(\vec{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{pmatrix},$$

o bien, de forma más compacta

$$\vec{l}\left(\vec{x}\right) = \vec{a} + B\vec{x},$$

donde $\vec{a}$ es un vector columna con entradas a_i y B es una matriz $p \times q$ con entradas b_{ij}.

Ahora ya estamos en disposición de dar una definición adecuada de diferenciabilidad de una función con valores vectoriales.

Definición 4.6 (Funciones vectoriales diferenciables)

Sea $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una función vectorial definida en el conjunto D. Se dice que $\vec{\varphi}$ es diferenciable en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$ si existe una función vectorial lineal

$$\vec{l}\left(\vec{x}\right) = \vec{\varphi}\left(\vec{x}_0\right) + T\left(\vec{x}_0\right)\left(\vec{x} - \vec{x}_0\right),$$

donde $T\left(\vec{x}_0\right)$ es una matriz real de dimensión $p \times q$, tal que:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) - \vec{l}\left(\vec{x}\right)}{\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|} = \vec{0},$$

Si $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable $\forall \vec{x} \in \mathring{D}$, decimos que la función es diferenciable en su dominio.

También en este caso conviene efectuar algunas aclaraciones dada la importancia del concepto de diferenciabilidad:

- La condición básica de diferenciabilidad también se se puede escribir como:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\left\|\vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) - \vec{l}\left(\vec{x}\right)\right\|}{\left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|} = 0,$$

o

$$\vec{\varphi}\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - \vec{l}\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = \vec{\epsilon}\left(\vec{h}\right)\left\|\vec{h}\right\|,$$

donde $\vec{\epsilon}\left(\vec{h}\right)$ es una función vectorial tal que $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \vec{\epsilon}\left(\vec{h}\right) = \vec{0}$.

- Esta definición es equivalente desde todo punto de vista a la que dimos para las funciones esacalares. Implica la existencia de una aproximación lineal razonable en cuanto que la distancia (norma) entre los valores vectoriales exactos y los aproximados es mucho menor que la distancia entre $\left\|\vec{h}\right\|$ entre los dos puntos $\vec{x}$ y $\vec{x}_0$.

- Además, se reduce fácilmente a la definición de diferenciabilidad de una función escalar. En efecto, si realizamos las siguientes substituciones

$$\begin{array}{ccc} \vec{\varphi}\left(\vec{x}\right) & \to & f\left(\vec{x}\right), \\ \vec{l}\left(\vec{x}\right) & \to & l\left(\vec{x}\right), \\ \vec{\epsilon}\left(\vec{h}\right) & \to & \epsilon\left(\vec{h}\right), \\ T & \to & (t_1, t_2, \ldots, t_q) \end{array}$$

el producto matricial $T\vec{h}$ queda reducido a un producto escalar, de manera que

$$\vec{\varphi} - \vec{l} - T\vec{h} = \vec{\epsilon}\left(\vec{h}\right)\left\|\vec{h}\right\| \longrightarrow f - l - \left\langle \vec{t}, \vec{h} \right\rangle = \epsilon\left(\vec{h}\right)\left\|\vec{h}\right\|,$$

con lo cual la afirmación precedente queda probada

Ejemplo 4.6 (Estudiando la diferenciabilidad de una función vectorial)

Como botón de muestra que nos permita comprender mejor la definición precedente demostraremos que la función vectorial $\overrightarrow{\varphi}(x,y) = (e^{xy}, \operatorname{sen} x \cos y)$ es diferenciable en el origen de coordenadas.

Para ello debemos probar que existe una matriz

$$T(0,0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que la función lineal $\overrightarrow{l}(x,y)$ (que escribimos en forma matricial)

$$\begin{pmatrix} l_x(x,y) \\ l_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x(0,0) \\ \varphi_y(0,0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

verifica que

$$\overrightarrow{\boldsymbol{L}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overrightarrow{\varphi}(x,y) - \overrightarrow{l}(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}.$$

Las componentes de la diferencia $\overrightarrow{\varphi}(x,y) - \overrightarrow{l}(x,y)$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y) - l_x(x,y) &= e^{xy} - 1 - ax - by, \\ \varphi_y(x,y) - l_y(x,y) &= \operatorname{sen} x \cos y - cx - dy, \end{aligned}$$

y como debemos obtener el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$, es posible efectuar un desarrollo en serie de potencias alrededor de $x = y = 0$, de forma que

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y) - l_x(x,y) &= xy - ax - by + \ldots, \\ \varphi_y(x,y) - l_y(x,y) &= (1-c)x - dy + \ldots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\overrightarrow{\boldsymbol{L}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy - ax - by, (1-c)x - dy)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \ldots$$

y para simplificar aún más el cálculo efectuaremos un cambio a coordenadas polares, con lo cual

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{L}} &= \lim_{r\to 0} \left(\frac{r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - ar\cos\theta - br\operatorname{sen}\theta}{r}, \frac{(1-c)r\cos\theta - dr\operatorname{sen}\theta}{r} \right) \\ &= \lim_{r\to 0} \left(-a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta, (1-c)\cos\theta - d\cos\theta\right). \end{aligned}$$

Así, para que el límite precedente exista y sea cero (cualquiera que sea $\theta(r)$) debemos tomar $a = b = d = 0$ y $c = 1$. En consecuencia concluimos que existe (al menos) una matriz

$$T(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que garantiza la diferenciabilidad de $\overrightarrow{\varphi}$ en $(0,0)$.

Podemos avanzar que la matriz formada por las derivadas parciales de las componentes de $\overrightarrow{\varphi}$ en el origen de coordenadas es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_x(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_x(0,0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_y(0,0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_y(0,0)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que concluiremos el ejemplo preguntándonos si en verdad se cumple que cualquiera que sea el punto (x,y)

$$T(x,y) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_x(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_x(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_y(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_y(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

A continuación enunciamos en dos teoremas consecutivos las condiciones necesarias y suficientes para que una función vectorial sea diferenciable en un punto del interior de su dominio.

Teorema 4.4 (Condiciones necesarias de diferenciabilidad)

Sea $\vec{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *una función diferenciable en* $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$*. Se cumplen entonces las siguientes propiedades:*

1. *La función es continua en el punto* $\vec{x}_0$*,*
2. *Las funciones componente son diferenciables en* $\vec{x}_0$*,*
3. *Existen todas las derivadas parciales en* $\vec{x}_0$ *y la matriz* $T(\vec{x}_0)$ *viene dada de forma única por*

$$T(\vec{x}_0) = \mathbf{D}\vec{\varphi}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(\vec{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1(\vec{x}_0)}{\partial x_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_p(\vec{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_p(\vec{x}_0)}{\partial x_q} \end{pmatrix}.$$

Así, $\mathbf{D}\vec{\varphi}(\vec{x}_0)$ es la matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de las funciones componente. El arreglo matricial es tal que cada fila contiene todas las derivadas parciales de una función componente con respecto a las distintas variables independientes x_j. Por tanto se trata de una matriz de dimensión $p \times q$.

Ejemplo 4.7

Construyamos a modo de ejemplo las matrices $\mathbf{D}\vec{\varphi}(\vec{x})$ de tres funciones diferentes, lo cual nos permitirá obtener cierta soltura en su manejo.

- Sea $\vec{\varphi}(x,y) = (e^{xy}, \operatorname{sen} x \cos y)$. Las derivadas parciales de las dos funciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_x(x,y)}{\partial x} &= ye^{xy}, & \frac{\partial \varphi_x(x,y)}{\partial y} &= xe^{xy}, \\ \frac{\partial \varphi_y(x,y)}{\partial x} &= \cos x \cos y, & \frac{\partial \varphi_y(x,y)}{\partial y} &= -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \end{aligned}$$

  y por lo tanto

$$\mathbf{D}\vec{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \cos x \cos y & -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \end{pmatrix}.$$

- Sea $f(x,y) = e^{xy}$ una función escalar definida en $\mathbb{R}^2$. Sus derivadas parciales vienen dada por

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xe^{xy},$$

  con lo cual la matriz de derivadas primeras es la matriz fila

$$\boldsymbol{D}f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}.$$

  Es muy interesante observar que a todos los efectos $\boldsymbol{D}f(x,y) \equiv \vec{\nabla} f(x,y)$.

- Por último consideraremos el vector de posición de un punto material en el espacio dado por la cúbica alabeada $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$. Las derivadas de las tres funciones componentes son $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2t$ y $z'(t) = 3t^2$. Así, la derivada vectorial es

$$\mathbf{D}\overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Las condiciones suficientes para que una función sea diferenciable se exponen a continuación.

Teorema 4.5 (Condiciones suficientes de diferenciabilidad)

Sea $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una función vectorial definida en el conjunto D. La función $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ es diferenciable en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$ si se cumple una cualquiera de las siguientes condiciones:

1. *Todas las funciones componente $\varphi_i\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ son diferenciables en el punto $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$,*
2. *Todas las funciones componente son de clase C^1 en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ (se dice entonces que la función vectorial es de clase C^1 en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$).*

Ejemplo 4.8

Demuestre que la función $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(x, y) = \left(e^{x^2+y^2}, x^2 - y^2, \pi(xy + y^2)\right),$$

es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Demuestre explícitamente que se cumple la definición de diferenciabilidad en el origen de coordenadas.

Resulta trivial probar la diferenciabilidad de $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(x, y)$ ya que sus tres componentes son suma, producto y composición de funciones elementales diferenciables en todo el plano. Para verificar que se satisface la definición de diferenciabilidad en $(0, 0)$ debemos probar que el límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(x, y) - \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(0, 0) - \mathbf{D}\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(0, 0)(x, y)\right\|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

La matriz de derivadas parciales se escribe en este caso

$$\mathbf{D}\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \\ 2x & 2y \\ \pi y & \pi x + 2y \end{pmatrix},$$

de manera que $\mathbf{D}\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(0, 0)(x, y) = (0, 0, 0)$. Por lo tanto

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(x, y) - (1, 0, 0)\right\|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\frac{\left(e^{x^2+y^2} - 1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + \pi^2\left(xy + y^2\right)^2}{x^2 + y^2}}.$$

Pasando a coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{r\to 0} \sqrt{\frac{\left(e^{r^2} - 1\right)^2}{r^2} + r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)^2 + \pi^2 r^2\left(\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)^2} \\ &= \lim_{r\to 0} r\sqrt{1 + \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)^2 + \pi^2\left(\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right)^2} = 0, \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrada la diferenciabilidad en el origen.

Aunque de menor entidad que las propiedades que hemos enumerados en los tres teoremas precedentes, las propiedades aritméticas de las funciones diferenciables también son de utilidad y deben ser enuciadas aquí.

Teorema 4.6 (Propiedades aritméticas de las funciones vectoriales diferenciables)

Sean $\overrightarrow{\varphi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $\overrightarrow{\phi} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *dos funciones vectoriales y* $u\left(\overrightarrow{x}\right)$ *una función escalar diferenciables en* $\overrightarrow{x}_0 \in \overline{D}$. *Entonces se cumple que las siguientes funciones son diferenciables en* $\overrightarrow{x}_0$

$$\left[\overrightarrow{\varphi} + \overrightarrow{\phi}\right]\left(\overrightarrow{x}\right) \; ; \; \left[u\overrightarrow{\varphi}\right]\left(\overrightarrow{x}\right) \; ; \; \left[\left\langle \overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\phi} \right\rangle\right]\left(\overrightarrow{x}\right),$$

y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}\left[\overrightarrow{\varphi} + \overrightarrow{\varphi}\right]\left(\overrightarrow{x}_0\right) &= \mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) + \mathbf{D}\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right), \\
\boldsymbol{D}\left[u\overrightarrow{\varphi}\right]\left(\overrightarrow{x}_0\right) &= \boldsymbol{D}u\left(\overrightarrow{x}_0\right)\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)^T + u\mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right), \\
\boldsymbol{D}\left[\left\langle \overrightarrow{\varphi}, \overrightarrow{\phi} \right\rangle\right]\left(\overrightarrow{x}_0\right) &= \mathbf{D}\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) + \mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right).
\end{aligned}$$

Demostración 4.6

La demostración de estas propiedades sigue un curso muy parecido al de funciones de una variable. Su dificultad es mayor debido sobre todo a que trabajamos ahora con matrices y vectores. Con el fin de evitar el aburrimiento del lector sólo daremos la demostración correspondiente a la función suma.

Sea $\overrightarrow{\zeta}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) + \overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}\right)$. Demostrar que la función suma es diferenciable en $\overrightarrow{x}_0$ y que

$$\mathbf{D}\overrightarrow{\zeta}\left(\overrightarrow{x}_0\right) = \mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) + \mathbf{D}\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right),$$

implica demostrar que

$$L = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \frac{\Delta\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}_0\right)}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|} = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x}_0} \frac{\left\|\overrightarrow{\zeta}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\zeta}\left(\overrightarrow{x}_0\right) - \mathbf{D}\overrightarrow{\zeta}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|} = 0.$$

Desarrollando el cociente incremetal anterior tenemos

$$\frac{\Delta\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}_0\right)}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) - \mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right) + \left(\overrightarrow{\varphi} \leftrightarrow \overrightarrow{\phi}\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|},$$

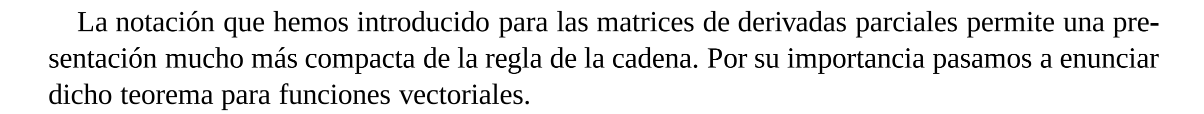
y utilizando la desiguladad del triángulo resulta que

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{\Delta\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}_0\right)}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|} &\leq \frac{\left\|\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) - \mathbf{D}\overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|} \\
&+ \frac{\left\|\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right) - \mathbf{D}\overrightarrow{\phi}\left(\overrightarrow{x}_0\right)\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right)\right\|}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0\right\|}.
\end{aligned}$$

La regla del bocadillo establece de forma inmediata que

$$L = \lim_{\vec{\boldsymbol{x}} \to \vec{\boldsymbol{x}}_0} \frac{\Delta\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\left\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{x}}_0\right\|} = 0,$$

si las dos funciones $\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ y $\vec{\boldsymbol{\phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ son diferenciables en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$.



La notación que hemos introducido para las matrices de derivadas parciales permite una presentación mucho más compacta de la regla de la cadena. Por su importancia pasamos a enunciar dicho teorema para funciones vectoriales.

Teorema 4.7 (La regla de la cadena para funciones vectoriales)

Sean $\vec{\boldsymbol{\varphi}} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *y* $\vec{\boldsymbol{\phi}} : E \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *dos funciones vectoriales definidas en los dominios* D *y* E*. Supongamos que* $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(D) \subset E$*, que* $\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ *es diferenciable en* $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$ *y que* $\vec{\boldsymbol{\phi}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}\right)$ *es diferenciable en* $\vec{\boldsymbol{u}}_0 = \vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) \in \mathring{E}$*. Entonces la función*

$$\vec{\boldsymbol{\phi}} \circ \vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \vec{\boldsymbol{\phi}}\left(\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)\right),$$

es diferenciable en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ *y*

$$\boldsymbol{D}\left[\vec{\boldsymbol{\phi}} \circ \vec{\boldsymbol{\varphi}}\right]\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \mathbf{D}\vec{\boldsymbol{\phi}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)\mathbf{D}\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right),$$

donde $\boldsymbol{D}\left[\vec{\boldsymbol{\phi}} \circ \vec{\boldsymbol{\varphi}}\right]\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ *es una matriz de dimensión* $m \times q$*,* $\mathbf{D}\vec{\boldsymbol{\phi}}\left(\vec{\boldsymbol{u}}_0\right)$ *tiene dimensión* $m \times p$ *y* $\mathbf{D}\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ *dimensión* $p \times q$*.*

4.3 Campos escalares y vectoriales

4.3.1 Definiciones y ejemplos

La denominación campo escalar, que utilizaremos frecuentemente de ahora en adelante, es un sinónimo de función escalar (dependiente de varias variables). Los campos vectoriales son un tipo particular de función con valores vectoriales en los que el dominio y la imagen de la función son subconjutos de un mismo espacio euclídeo.

Definición 4.7 (Campos escalares y vectoriales)

Una función escalar $\phi : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *se denomina también campo escalar en* $\mathbb{R}^q$*. Análogamente, las funciones vectoriales*

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q\,;\, \vec{\boldsymbol{x}} \in D \to \vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \in \mathbb{R}^q,$$

se denominan campos vectoriales en $\mathbb{R}^q$*.*

No hace falta decir que un campo vectorial queda perfectamente determinado si conocemos su expansión en una base de $\mathbb{R}^q$. En este curso supondremos que se trata de la base estándar del espacio de modo que

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=\sum_{i=1}^{q}\Phi_i\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)\overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i.$$

En el plano o en el espacio denotaremos los campos vectoriales como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y\right) &= \Phi_x\left(x,y\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}+\Phi_y\left(x,y\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} && \left(\mathbb{R}^2\right),\\ \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y,z\right) &= \Phi_x\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}+\Phi_y\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}+\Phi_z\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{k}} && \left(\mathbb{R}^3\right),\end{aligned}$$

aúnque en la literatura también se encuentra la siguiente notación

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}\left(x,y\right) &= P\left(x,y\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}+Q\left(x,y\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}},\\ \overrightarrow{\boldsymbol{F}}\left(x,y,z\right) &= P\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}+Q\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}+R\left(x,y,z\right)\overrightarrow{\boldsymbol{k}}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.9 (Ejemplos de campos escalares y vectoriales en la física)

Ejemplos típicos de campos escalares en física son la temperatura $T\left(x,y,z\right)$ de los puntos (x,y,z) de un cuerpo caliente o la energía potencial $U\left(x,y,z\right)$ de una partícula situada en la posición (x,y,z). Un caso que ocupa un lugar privilegiado en los libros de física por su importancia, es el del oscilador armónico. Se trata de una partícula cuya energía potencial es

$$U\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2}K(x^2+y^2+z^2).$$

La fuerza (llamada recuperadora)

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}\left(x,y,z\right)=-K\left(x\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}+y\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}+z\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right),$$

que actúa sobre la partícula, es un ejemplo de campo vectorial.

Por otro lado los campos eléctrico $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\left(x,y,z\right)$ y magnético $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\left(x,y,z\right)$ generados por ciertas distribuciones de carga y corrientes son ejemplos paradigmáticos de campos vectoriales. También lo es la fuerza que experimenta una partícula de carga q en presencia de dichos campos

$$\overrightarrow{\boldsymbol{F}}=q\overrightarrow{\boldsymbol{E}}+\frac{q}{c}\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\times\overrightarrow{\boldsymbol{B}},$$

que se conoce como fuerza de Lorentz. En esta expresión $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ es la velocidad de la partícula que entra en el dominio de los campos y c es la velocidad de la luz.



4.3.2 Representación gráfica de un campo vectorial

En el tema 2 aprendimos a construir diversos tipos de representaciones gráficas de una función escalar, tales como la propia gráfica de la función y los conjuntos de nivel. Como el lector puede suponer las cosas son bastante más complicadas cuando se trata de un campo vectorial. Una manera de visualizar un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ consiste en seleccionar un conjunto de puntos distribuidos de forma uniforme en su dominio de definición y representar en cada uno de ellos el valor vectorial del campo.

Considere, por ejemplo, el siguiente campo definido en $\mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2\ ;\ (x,y)\longrightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y\right)=(-y,x).$$

Seleccionamos una red de 10×10 puntos distribuidos homogéneamente en el intervalo $[-1,1]\times[-1,1]$ y representamos el valor del campo en cada uno de ellos. El resultado se muestra en la siguiente figura.

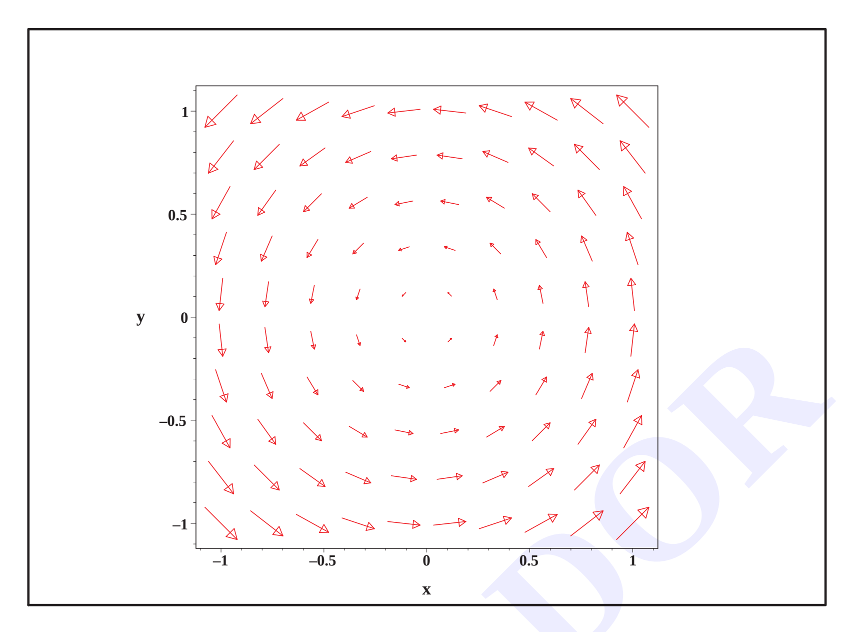


Figura 4.2: Representación gráfica del campo vectorial (-y,x)

Un ejemplo análogo en tres dimensiones nos lo proporciona un campo central de la forma

$$\overrightarrow{\Phi} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; (x,y,z) \longrightarrow \overrightarrow{\Phi}(x,y,z) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{-z}{x^2+y^2+z^2} \right),$$

que representaremos en el cubo $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$. Distribuyendo uniformemente puntos en una red $6\times6\times6$ y representando el vector correspondiente en cada uno de ellos resulta

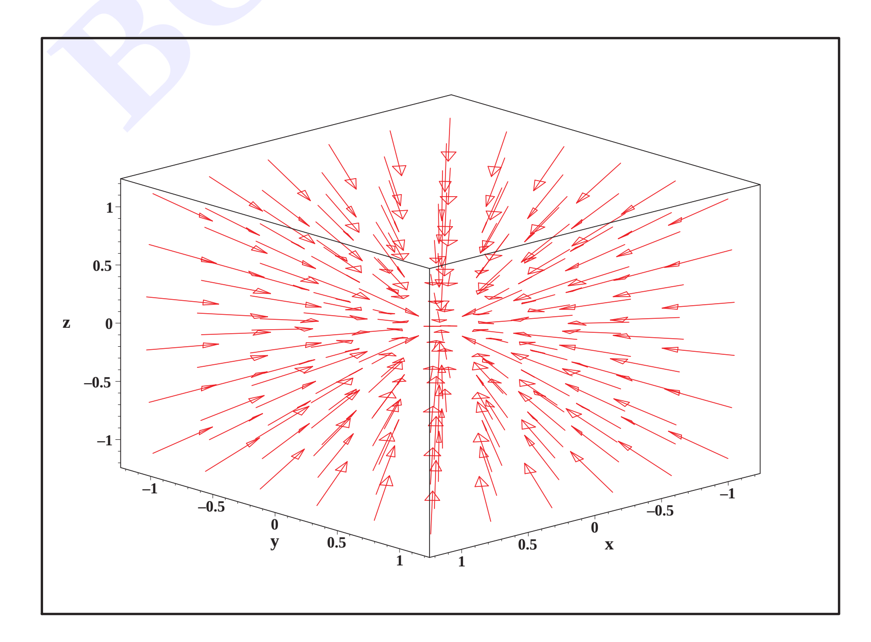


Figura 4.3: Representación gráfica de un campo central en el espacio

4.3.3 Gradiente, divergencia y rotacional de un campo

Dada una función $\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ su gradiente viene dado por

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2+\cdots+\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_q}\vec{\boldsymbol{e}}_q,$$

en todos los puntos donde estén definidas las derivadas parciales de la función . Puede resultar conveniente reescribir la ecuación anterior como

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_q}\vec{\boldsymbol{e}}_q\right)\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right),$$

y considerar el símbolo

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}=\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_q}\vec{\boldsymbol{e}}_q,$$

como un vector simbólico llamado «nabla» o, en ocasiones, operador de Hamilton. Se trata en realidad de un operador de tipo vectorial, que sólo adquiere sentido pleno en tanto que actúa sobre campos escalares o vectoriales. En $\mathbb{R}^3$ este vector viene dado por

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\boldsymbol{\imath}}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\boldsymbol{\jmath}}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}.$$

Convenimos en definir la acción del operador de Hamilton sobre un campo de las siguientes formas:

Gradiente Dado un campo escalar ϕ definimos su vector gradiente como

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}\vec{\boldsymbol{e}}_1+\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_2}\vec{\boldsymbol{e}}_2+\cdots+\frac{\partial\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_q}\vec{\boldsymbol{e}}_q.$$

Divergencia El «producto escalar» del operador nabla y un campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ es un nuevo campo escalar, que recibe el nombre de divergencia del campo $\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ y se denota por

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\partial\Phi_{x_1}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}+\frac{\partial\Phi_{x_2}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\Phi_{x_q}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_q}.$$

Laplaciano La divergencia del gradiente de un campo escalar recibe el nombre de Laplaciano y se denota por la letra Δ

$$\Delta\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\vec{\boldsymbol{\nabla}}\cdot\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\partial^2\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial^2\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_q}.$$

Rotacional En el espacio podemos definir también el producto vectorial del operador nabla y un campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y,z\right)$. El resultado es un nuevo campo vectorial que llamamos rotacional del campo original

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}}\times\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y,z\right)=\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{\imath}} & \vec{\boldsymbol{\jmath}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \Phi_x\left(x,y,z\right) & \Phi_y\left(x,y,z\right) & \Phi_z\left(x,y,z\right)\end{vmatrix}.$$

4.3.4 Interpretación de la divergencia y el rotacional

En el tema 3 estudiamos con cierto detenimiento las propiedades del gradiente. La más importante es que en cada punto del dominio de la función el gradiente señala la dirección y sentido en el que la tasa de variación local de la función es máxima. Obtener de forma rigurosa una interpretación intuitiva de la divergencia o del rotacional de un campo vectorial es bastante más complicado y requiere la utilización de los teoremas integrales del cálculo vectorial, que estudiaremos al final del curso.

Intentaremos suplir este problema mediante ejemplos. Los más sencillos están relacionados con los campos de velocidades de un gas o un líquido. Suponga que la velocidad de una molécula de fluido que se encuentra qne le punto (x, y, z) viene dada por el campo vectorial $\vec{V}(x, y, z)$. Como vamos a ver en los siguientes ejemplos $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y, z)$ está relacionada con la tendencia del fluido a aproximarse o a alejarse del punto, es decir con la existencia de fuentes o sumideros

De forma más general, la divergencia de un campo vectorial suele ir asociada en física a la existencia de «fuentes» o «sumideros» de tipo escalar. Así, en electromagnetismo la fuente escalar de campo es la carga eléctrica. Esto se refleja en las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo (ecuaciones de Maxwell) en que la divergencia del campo eléctrico viene dada por la densidad de carga eléctrica. Por el contrario la divergencia del campo magnético es nula lo que significa que no hay fuentes escalares de campo magnético (no existen cargas magnéticas o monopolos magnéticos).

El rotacional del campo de velocidades $\vec{\nabla} \times \vec{V}(x, y, z)$ nos da una medida de la tendencia del fluido a rotar alrededor de dicho punto. Un fluido irrotacional, cuya velocidad sólo tiene componentes radiales, se obtiene exigiendo que el rotacional del campo de velocidades sea nulo en todo el espacio $\vec{\nabla} \times \vec{V}(x, y, z) \equiv 0$.

De un modo análogo aunque quizá algo menos intuitivo, el rotacional de un campo vectorial físico está asociada a la existencia de fuentes vectoriales de campo. En el caso del campo magnético, son las corrientes de carga eléctrica. Una espira por la que circula una corriente de carga eléctrica (otra vez las rotaciones) es una fuente de campo magnético.

Con el fin de verificar estas ideas de forma sencilla estudiaremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.10 (Significado de la divergencia)

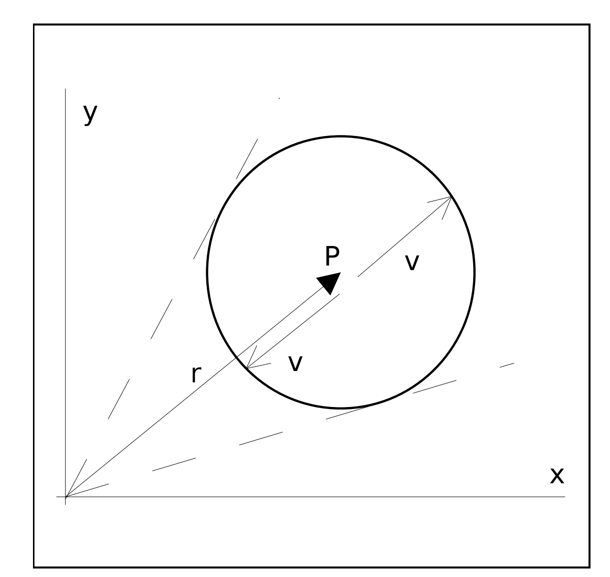


Figura 4.4:

Consideremos el siguiente campo de velocidades

$$\overrightarrow{\boldsymbol{V}}(x,y) = \alpha x \overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \alpha y \overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \alpha \overrightarrow{\boldsymbol{r}},$$

donde $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (x,y)$. Por sencillez centraremos nuestra atención en el origen de coordenadas, aunque argumentos más elaborados permiten ver que (con algunas diferencias) el fenómeno es general. El movimiento de este fluido es radial y va dirigido hacia el origen si $\alpha < 0$ o escapa del origen si $\alpha > 0$. Su divergencia es

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{V}}(x,y) = \alpha \frac{\partial x}{\partial x} + \alpha \frac{\partial y}{\partial y} = 2\alpha,$$

y observamos que es positiva cuando $\alpha > 0$ y el fluido tiende a escapar del origen y negativa cuando, por el contrario, $\alpha < 0$ y el fluido tiende a concentrarse en el origen. Además

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{V}}(x,y) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} & \overrightarrow{\boldsymbol{j}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \alpha x & \alpha y & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}},$$

como corresponde a un fluido que no forma remolinos alrededor de ningún punto.



Ejemplo 4.11 (Significado del rotacional)

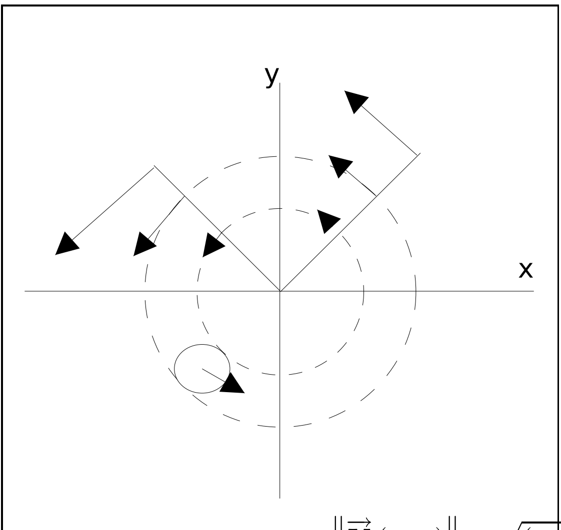


Figura 4.5:

Consideremos ahora un campo de velocidades diferente

$$\vec{V}(x,y) = -\omega y\,\vec{i} + \omega x\,\vec{j}\,.$$

Si denotamos por $\vec{r}$ al vector de posición del punto (x,y), se cumple que

$$\left\langle \vec{V}(x,y)\,,\vec{r}\right\rangle = \omega\,\langle(-y,x)\,,(x,y)\rangle = 0,$$

lo cual demuestra que el campo de velocidades es perpendicular en cada punto a su vector de posición. Además

$$\left\|\vec{V}(x,y)\right\| = \sqrt{(\omega y) + (\omega x)} = \omega\,\|\vec{r}\|\,,$$

lo que corresponde con una rotación uniforme del fluido alrededor del origen con velocidad angular ω (una rotación sólida como la de un disco de vinilo). De hecho, la divergencia del campo es

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(x,y) = -\omega\frac{\partial y}{\partial x} + \omega\frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Este resultado nos indica que la cantidad de fluido en un entorno de cualquier punto permanece constante a lo largo del tiempo, es decir el fluido no presenta tendencia a acumularse o a escapar de ningún punto del plano. Si consideramos un pequeño disco alrededor de un punto, la cantidad de fluido que penetra en el mismo por una mitad cualquiera de su circunferencia es igual a la que sale por la mitad opuesta.

Por el contrario, el rotacional del campo

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\,\vec{k}\,,$$

no es nulo, lo que indica su tendencia a formar remolinos (en este caso un único remolino alrededor del origen).

4.3.5 Algunas relaciones básicas del operador ∇

Teorema 4.8

Sean $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\vec{\Phi} : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo escalar y un campo vectorial definidos en $D \subset \mathbb{R}^3$ y de clase C^2, esto es, con todas sus derivadas parciales hasta orden dos continuas en $\mathring{D}$. Se cumple entonces que:

1. $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\phi = \vec{0}$*: el rotacional de un gradiente es el vector nulo,*
2. $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{\Phi}\right) = 0$*: la divergencia de un rotacional es cero.*

Demostración 4.8

Tal como indica el enunciado la función escalar $\phi(x, y, z)$ tiene todas suss derivadas parciales hasta orden dos continuas por lo que el teorema de Clairaut **??** garantiza la igualdad de las derivadas mixtas. De forma similar cada una de las componentes del campo vectorial

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}(x, y, z) = (\Phi_x(x, y, z), \Phi_y(x, y, z), \Phi_z(x, y, z)),$$

es una función escalar de clase C^2 por lo que sus derivadas mixtas también son iguales. Bajo estas condiciones se cumple que:

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi &= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\vec{k} = \vec{\mathbf{0}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \left(\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\boldsymbol{\Phi}}\right) &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \Phi_x & \Phi_y & \Phi_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2\Phi_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\Phi_x}{\partial z\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\Phi_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\Phi_y}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2\Phi_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi_z}{\partial y\partial x}\right) = 0.\end{aligned}$$

4.3.6 Campos conservativos

Definición 4.8 (Campos conservativos)

Un campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\Phi}} : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *es conservativo si existe un campo escalar* $\phi : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(\vec{\boldsymbol{x}}),$$

es decir, las componentes del campo vectorial satisfacen la igualdad $\Phi_i(\vec{\boldsymbol{x}}) = \dfrac{\partial\phi(\vec{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i}$.

En física el campo ϕ se denomina potencial escalar y se utiliza un convenio ligeramente distinto ya que la relación entre el potencial y el campo vectorial viene dada por $\vec{\boldsymbol{\Phi}}(\vec{\boldsymbol{x}}) = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi(\vec{\boldsymbol{x}})$. Los conjuntos de nivel de la función ϕ se denominan en física conjuntos equipotenciales: curvas equipotenciales en $\mathbb{R}^2$ y superficies equipotenciales en $\mathbb{R}^3$. Debido a las propiedades del gradiente el campo vectorial siempre es ortogonal a los conjuntos equipotenciales, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.12 (Ejemplos de campos conservativos en física)

Denotemos por $\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = (x, y, z)$ el vector de posición de un punto genérico en el espacio y su módulo por $r = \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\right\|$. Admitiendo que nos encontramos en el vacio perfecto, el campo electrostático generado por una carga eléctrica Q, que se encuentra en reposo en el origen de coordenadas, o el campo gravitatorio creado por una masa M en dicho punto, son campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ dados por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\,(x, y, z) = \frac{K}{r^3}\overrightarrow{\boldsymbol{r}} = K\frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde la expresión y las unidades de K son diferentes en ambos casos. Por ejemplo, para el campo gravitatorio $K = -GM$ donde G es la constante universal de la gravitación. En el sistema de unidades MKS la constante K del campo electrostático se escribe $K = Q/(4\pi\epsilon_0)$, donde ϵ_0 es la susceptibilidad eléctrica del vacio.

Estos campos vectoriales derivan de un potencial escalar

$$\phi\,(x, y, z) = \frac{K}{r} = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\,(x, y, z) = -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\phi\,(x, y, z)\,.$$

Las superficies equipotenciales $\phi\,(x, y, z) = c$ son esferas de radio K/c, mientras que el campo vectorial es radial (proporcional a $\overrightarrow{\boldsymbol{r}}$), y por tanto ortogonal a las superficies equipotenciales.

En general el campo eléctrico $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}\,(x, y, z)$ se obtiene siempre como el gradiente de un potencial escalar $\phi\,(x, y, z)$. El campo magnético $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\,(x, y, z)$ también está relacionado con un potencial; sin embargo se trata de un potencial vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}\,(x, y, z)$ y la relación entre ambos es muy distinta

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\,(x, y, z) = \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{A}}\,(x, y, z)\,.$$



Ejemplo 4.13 (Obtención del potencial escalar mediante cuadraturas)

Sea el campo vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\,(x, y) = (3 + 2xy)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + (x^2 - 3y^2)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}$ definido en el plano. Determine si es un campo conservativo y en caso afirmativo encuentre la expresión del campo escalar del que deriva.

Admitamos como hipótesis que es un campo conservativo que deriva como un gradiente del potencial $\phi\,(x, y)$. Por lo tanto

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\,(x, y) = \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\phi\,(x, y) \to \begin{cases} \Phi_x\,(x, y) &= \dfrac{\partial\phi\,(x, y)}{\partial x}, \\ \Phi_y\,(x, y) &= \dfrac{\partial\phi\,(x, y)}{\partial y}, \end{cases}$$

Así, se cumplirá que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi\,(x, y)}{\partial x} &= 3 + 2xy, \\ \frac{\partial\phi\,(x, y)}{\partial y} &= x^2 - 3y^2. \end{aligned}$$

Integrando la primera ecuación con respecto a la variable x, obtenemos

$$\phi\,(x, y) = 3x + x^2 y + \zeta(y),$$

donde $\zeta(y)$ es una función arbitraria de la variable y. Derivando parcialmente con respecto a y la expresión que hemos obtenido e introduciendo el resultado en la segunda ecuación

$$x^2 + \frac{d\zeta}{dy} = x^2 - 3y^2, \to \frac{d\zeta}{dy} = -3y^2.$$

El hecho de que la derivada de la función ζ sólo dependa de y es un resultado satisfactorio. Si hubiesemos obtenido cualquier tipo de dependencia en x habríamos llegado a un absurdo con lo cual la hipótesis inicial sobre el carácter conservativo del campo vectorial sería falsa.

Integrando en y llegamos a que $\zeta(y) = -y^3 + k$, siendo k una constante arbitraria. En definitiva, el potencial escalar es

$$\phi\,(x, y) = 3x - yx^2 - y^3 + k,$$

y no resulta complicado verificar que sus derivadas parciales llevan a las componentes del campo vectorial.



4.4 Curvas parametrizadas

En la sección 1.5 del tema **??** presentamos varios ejemplos cuyo objetivo era convencer al lector de que toda curva en $\mathbb{R}^q$ puede caracterizarse mediante una función vectorial dependiente de una sola variable real.

Consideremos, para fijar ideas, una función vectorial

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(t) = (\varphi_1\,(t)\,, \varphi_2\,(t)\,, \cdots, \varphi_q\,(t)) \quad \backslash.\;\; t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad (*)$$

continua en todos los puntos de su dominio de definición . Podemos considerar que $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(t)$ tiene su origen situado sobre el origen de un sistema de coordenadas en $\mathbb{R}^q$ y que su extremo señala el punto $P \triangleq (x_1, x_2, \cdots, x_{;q})$, de manera que

$$x_1 = \varphi_1\,(t)\,, \cdots, x_i = \varphi_i\,(t)\,, \cdots, x_q = \varphi_q\,(t)\,. \quad (**)$$

Cuando t varía dentro del intervalo I las coordenadas x_i también varían y el punto P traza una línea o curva en $\mathbb{R}^q$. Como la función es continua dos valores sucesivos del parámetro t, t_1 y t_2, definirán dos puntos P_1 y P_2, que se encontrarán tan próximos como se quiera sin más que exigir que $|t_1 - t_2| \ll 1$. Por tanto, es razonable afirmar que la línea descrita por P es continua. La ecuación $(*)$ recibe el nombre de ecuación vectorial de la curva mientras que las q ecuaciones $(**)$ son sus ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 4.14 (Parametrización vectorial de una curva)

En este ejemplo obtendremos la ecuación vectorial de la curva C definida por la intersección del cilindro de radio 1 centrado sobre el eje Z $(x^2 + y^2 = 1)$ y del plano de ecuación $y + z = 2$.

La figura superior muestra de forma esquemática como se forma la curva C como intersección de las dos superficies. Resulta patente que la proyección de C sobre el plano XY coincide con la base (que llamamos C_{xy}) del cilindro.
Sabemos que en el plano XY una circunferencia de radio unidad centrada en el origen admite una ecuación de la forma

$$C_{xy}: \;\; \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \quad \backslash.\;\; t \in [0, 2\pi)$$

La diferencia entre los puntos de C y de C_{xy} radica en el valor de la coordenada z; utilizando la ecuación del plano podemos despejar z en función de y, con lo que obtenemos que $z = 2 - y$. Ahora bien, sobre la curva C se cumple que $y = \operatorname{sen}(t)$, y por tanto las ecuaciones paramétricas de la curva son

$$x = \cos(t), y = \operatorname{sen}(t), z = 2 - \operatorname{sen}(t),$$

lo que da lugar a la siguiente función vectorial

$$C: \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = (cos(t), sen(t), (2 - y(t)))\,, \quad \backslash.\;\; t \in [0, 2\pi).$$

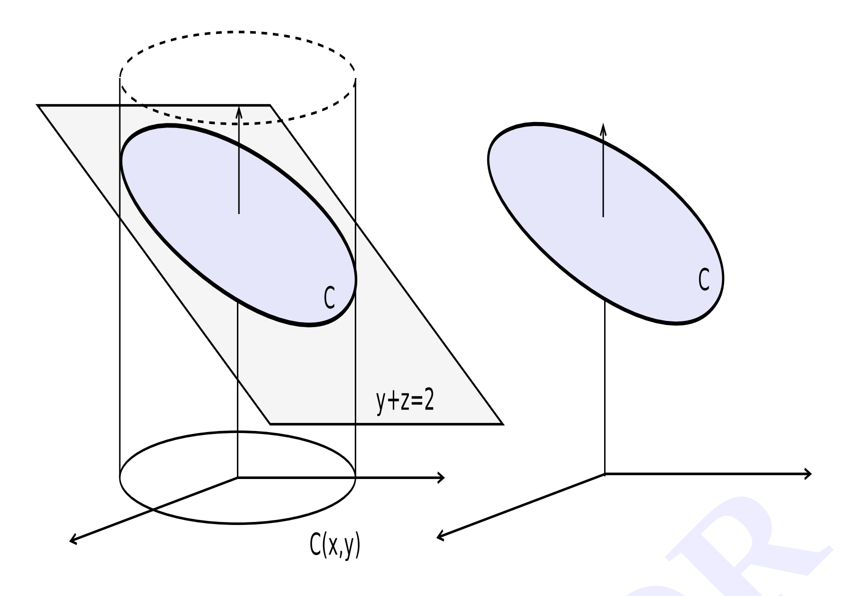


Figura 4.6: Intersección plano-cilindro

Definición 4.9 (Trayectorias y curvas)

Una trayectoria en $\mathbb{R}^q$ *es una función vectorial continua* $\overrightarrow{\varphi} : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$*; si* $q = 2$ *ó* 3 *se habla de trayectoria en el plano o en el espacio.*

La imagen de la función, esto es, el conjunto

$$C \triangleq \left\{ \overrightarrow{\varphi}(t) \in \mathbb{R}^q \ \backslash . \ t \in [a,b] \right\},$$

se denomina curva hodógrafa de $\overrightarrow{\varphi}$*, siendo* $\overrightarrow{\varphi}(a)$ *y* $\overrightarrow{\varphi}(b)$ *sus puntos extremos.*

Se dice que la trayectoria $\overrightarrow{\varphi}(t)$ parametriza vectorialmente la curva C y la dota de una orientación ya que los puntos de la misma se recorren en un orden dado desde $\overrightarrow{\varphi}(a)$ hasta $\overrightarrow{\varphi}(b)$ según t recorre el intervalo $[a,b]$.

La denominación de trayectoria para la función vectorial que parametriza una curva proviene sin duda de la física donde se llama de esa forma a la función $\overrightarrow{\varphi}(t)$ que caracteriza la posición cambiante en el tiempo (que se denota usualmente por t) de un móvil. De hecho, como vamos a ver a continuación es bastante habitual en geometría denominar velocidad $\overrightarrow{v}(t)$ y aceleración $\overrightarrow{a}(t)$ a las derivadas primera y segunda de la trayectoria.

4.4.1 Derivadas de una trayectoria

Las derivadas parciales de una función vectorial se obtienen derivando parcialmente las funciones componente. Una trayectoria es una función vectorial que depende de una sóla variable por lo que se trata en realidad de derivadas ordinarias. Sabemos que en este caso los conceptos de derivabilidad y diferenciabilidad coinciden por lo que los utilizaremos indistintamente a lo

largo de esta sección.

Definición 4.10 (Derivada de una trayectoria)

Sea $\overrightarrow{\varphi}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *una trayectoria en el espacio* $\mathbb{R}^q$*. Definimos su derivada de orden* n *en* $t_0 \in \mathring{I}$ *como el vector*

$$\frac{d^n \overrightarrow{\varphi}(t_0)}{dt^n} \equiv \overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t_0) \triangleq \sum_{i=1}^{q} \frac{d^n \varphi_i(t_0)}{dt^n} \overrightarrow{\boldsymbol{e}}_i,$$

siempre y cuando existan todas las derivadas de orden n *de las funciones componente en dicho punto.*

Se llama función derivada de orden n *a la función*

$$\overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t) : \mathring{I} \to \mathbb{R}^q \ \backslash . \ \forall\, t \in \mathring{I} \to \overrightarrow{\varphi}^{(n)}(t) \, .$$

Las derivadas de primer y segundo orden de una trayectoria aparecen de forma habitual en las fórmulas de la geometría diferencial y reciben una denominación especial

Definición 4.11 (Velocidad y aceleración)

Sea $\overrightarrow{\varphi}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ *una trayectoria derivable al menos dos veces en* $\mathring{I}$*. Convenimos en utilizar los siguientes nombres:*

- ***velocidad:*** $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}(t) = \overrightarrow{\varphi}'(t)$,
- ***rapidez:*** $v(t) = \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|$,
- ***aceleración:*** $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}(t) = \overrightarrow{\varphi}''(t)$.

Las derivadas parciales de una función escalar multivariable (o la derivada ordinaria de una función de una variable real) tiene un significado geométrico claro: $\dfrac{\partial f(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0)}{\partial x_i}$ representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$ según el eje X_i. De forma totalmente similar, el vector derivada de una trayectoria en $t = t_0$ está relacionado con la recta tangente a la curva parametrizada por la trayectoria en el punto $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 = \overrightarrow{\varphi}(t_0)$.

Para tratar esta cuestión con un mínimo de rigor debemos definir con cuidado el concepto de recta tangente a una curva. Sea C una curva, P un punto sobre la misma y l una recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director a $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}$. Dado un punto Q sobre C y denotando por θ el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$, decimos que l es tangente a la curva C en el punto P si el ángulo $\theta \to 0$ cuando $Q \to P$ (ver la figura ...).

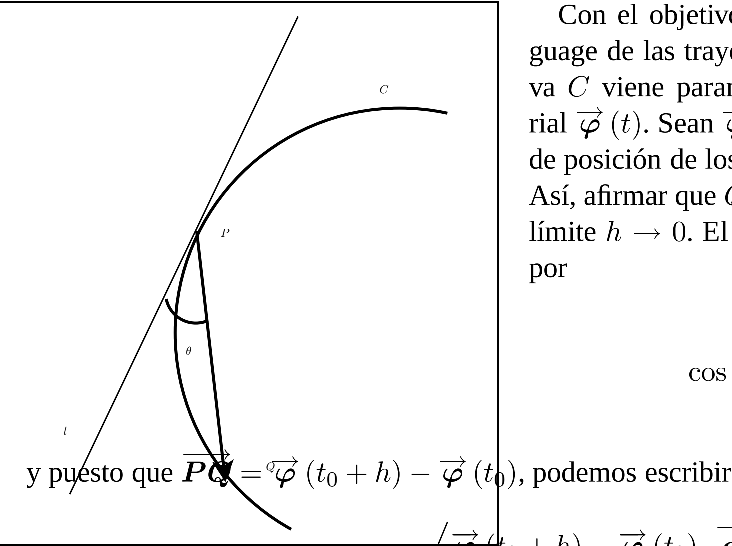


Figura 4.7: Recta tangente a C

Con el objetivo de traducir estas ideas al lenguage de las trayectorias supongamos que la curva C viene parametrizada por la función vectorial $\vec{\varphi}(t)$. Sean $\vec{\varphi}(t_0)$ y $\vec{\varphi}(t_0+h)$ los vectores de posición de los puntos P y Q respectivamente. Así, afirmar que $Q \to P$ es equivalente a tomar el límite $h \to 0$. El coseno del ángulo θ viene dado por

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}, \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|},$$

y puesto que $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0)$, podemos escribir

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0), \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0) \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|}.$$

Ahora bien, el miembro de la derecha satisface que

$$\frac{\left\langle \vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0), \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0) \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|} = \frac{\left\langle \dfrac{\vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h}, \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \dfrac{\vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|},$$

y por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \dfrac{\vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h}, \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \dfrac{\vec{\varphi}(t_0+h) - \vec{\varphi}(t_0)}{h} \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|} \xrightarrow{h\to 0} \frac{\left\langle \vec{\varphi}'(t_0), \vec{\boldsymbol{d}} \right\rangle}{\left\| \vec{\varphi}'(t_0) \right\| \left\| \vec{\boldsymbol{d}} \right\|}.$$

Este resultado implica que en el límite $h \to 0$ el ángulo θ coincide con el ángulo formado por $\vec{\boldsymbol{d}}$ y el vector derivada $\vec{\varphi}'(t_0)$. Para que en dicho límite $\theta = 0$ es condición necesaria y suficiente que los vectores $\vec{\boldsymbol{d}}$ y $\vec{\varphi}'(t_0)$ sean paralelos. En otras palabras, l es tangente a la curva C en el punto P si y solo si $\vec{\boldsymbol{d}} \parallel \vec{\varphi}'(t_0)$.

Definición 4.12 (Vector y recta tangentes a una curva)

Si C es una curva en $\mathbb{R}^q$ parametrizada por la trayectoria $\vec{\varphi} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$, cuya derivada en $t_0 \in \mathring{I}$ existe y es no nula ($\vec{\varphi}'(t_0) \neq \vec{\boldsymbol{0}}$), se cumple que:

- *$\vec{\varphi}'(t_0)$ es tangente a la curva C en el punto $P \triangleq \vec{\varphi}(t_0)$.*
- *la ecuación vectorial de la recta tangente a C en el punto P es*

$$\vec{\boldsymbol{l}}(t) = \vec{\varphi}(t_0) + (t - t_0)\vec{\varphi}'(t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 4.15 (Interpretación geométrica del vector derivada)

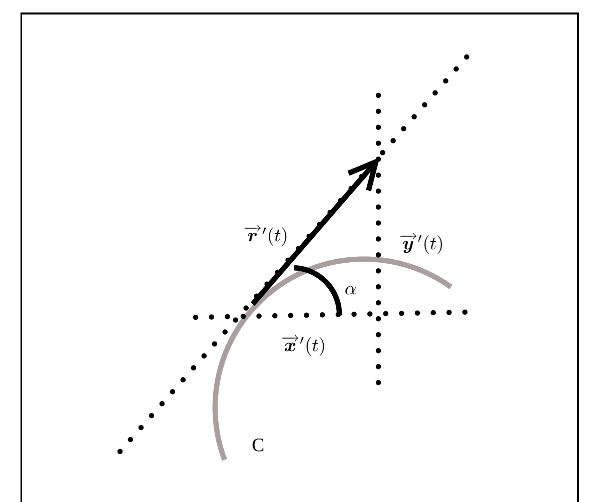


Figura 4.8: Interpretación geométrica de la derivada en 2D

Consideremos la siguiente trayectoria en el plano

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))\,,$$

que caracteriza la curva plana C de la figura. Supongamos que dicha curva puede describirse también como la gráfica de la función $y = y(x)$, de modo que la pendiente de la recta tangente en el punto (x, y) será

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{dy\,(x)}{dx}.$$

Admitamos momentáneamente que, tal como se muestra en la figura, el vector $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$ fuese tangente a la curva C en $\vec{\varphi}(t)$; entonces

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}.$$

Dado que hemos obtenido el resultado correcto estamos legitimados para pensar que la derivada de una trayectoria es un vector tangente a la curva que parametriza.

Ejemplo 4.16 (Vector tangente a una circunferencia)

Como un primer ejemplo de aplicación de la definición 4.12 calculemos el vector tangente a la circunferencia de radio unidad centrada en el origen, en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

La curva problema puede parametrizarse por la función vectorial $\vec{\varphi}(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$ donde $t \in [0, 2\pi]$. La derivada de esta función es

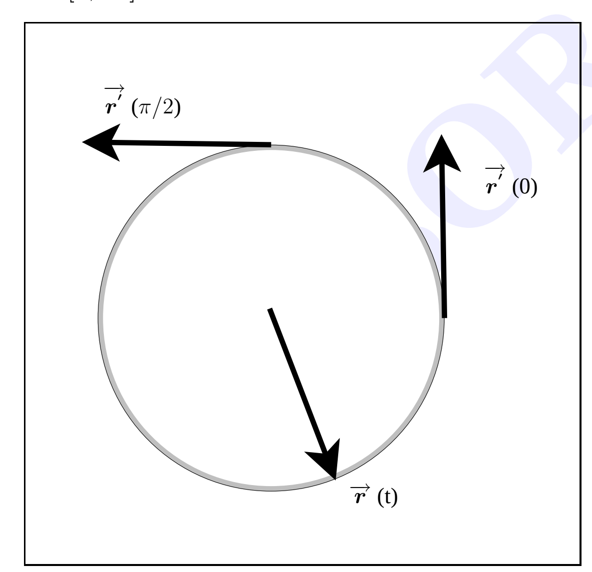


Figura 4.9: Vectores tangentes

$$\vec{r}'(t) = (-\,\mathrm{sen}(t), \cos(t))\,.$$

Por otro lado los dos puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ corresponden a los valores $t = 0$ y $t = \pi/2$ del parámetro, de modo que

$$\begin{array}{lcl} t = 0 & \Rightarrow & \vec{r}'(0) = (0, 1)\,, \\ t = \pi/2 & \Rightarrow & \vec{r}'(\pi/2) = (-1,\ 0)\,. \end{array}$$

Ejemplo 4.17 (Ángulo de corte de dos curvas)

Utilizaremos que el vector derivada de una trayectoria es tangente a la curva que parametriza para determinar el ángulo de corte de dos circunferencias en sus puntos de intersección. Las circunferencias en cuestión vienen dadas por las funciones vectoriales

$$\left.\begin{array}{rcl} C_1 : \vec{r}_1(t) & = & (cos(t), sen(t),\ 0) \\ C_2 : \vec{r}_2(u) & = & (\,0, cos(u), sen(u)) \end{array}\right\}\ t, u \in [0, 2\pi)$$

Como norma general, dos curvas $C_1 : \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}(t)\,,\ t \in I_1$ y $C_2 : \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}(u)\,,\ u \in I_2$ se cortarán si existen valores de los parámetros $t_0 \in I_1$ y $u_0 \in I_2$ tales que $\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}(t_0) = \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}(u_0)$. El ángulo que forman las dos curvas en el punto de corte se define como

$$cos(\theta_{12}) = \frac{\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}'(t_0)\,, \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}'(u_0) \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}'(t_0) \right\| \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{r_2}}'(u_0) \right\|}.$$

Los valores de t_0 y u_0 correspondientes a los puntos de corte de las dos curvas son los que satisfacen que

$$x_1(t_0) = x_2(u_0),\ y_1(t_0) = y_2(u_0),\ z_1(t_0) = z_2(u_0),$$

y utilizando las funciones componente de las dos trayectorias del problema, resulta

$$\left.\begin{array}{rcl} cos(t_0) &=& 0, \\ sen(t_0) &=& cos(u_0), \\ 0 &=& sen(u_0), \end{array}\right\} \Rightarrow (t_0, u_0) = (\pi/2, 0), (3\pi/2, \pi).$$

Substituyendo (por ejemplo) los valores de t_0 en $\overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}(t)$ obtenemos los dos puntos de corte

$$\begin{array}{llcl} t_0 = \pi/2, & \Rightarrow\ P \equiv \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}(\pi/2) &=& (\,0,\,1,\,0)\,, \\ t_0 = 3\pi/2, & \Rightarrow\ Q \equiv \overrightarrow{\boldsymbol{r_1}}(3\pi/2) &=& (\,0,-1,\,0)\,. \end{array}$$

Ahora debemos calcular los vectores tangentes a cada una de las curvas en los puntos de corte. Tenemos

$$\begin{array}{rcll} \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_1(t) &=& -sen(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}} & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_1(\pi/2) = -1\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \\ \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_1(3\pi/2) = 1\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \end{array}\right. \\ \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_2(u) &=& 0\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} - sen(u)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + cos(u)\overrightarrow{\boldsymbol{k}} & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_2(0) = 0\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \\ \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_2(\pi) = 0\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} - 1\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \end{array}\right. \end{array}$$

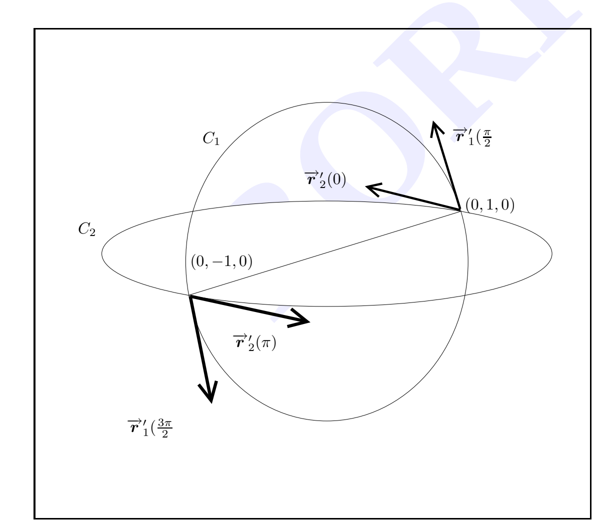


Figura 4.10: Cortes entre dos curvas

El cálculo de los productos escalares

$$\begin{array}{rcl} \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_1(\pi/2)\,, \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_2(0) \right\rangle &=& -\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_1(3\pi/2)\,, \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'_2(\pi) \right\rangle &=& -\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\imath}}, \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \right\rangle = 0, \end{array}$$

demuestra que estos vectores son ortogonales y por tanto que las circunferencias se cortan formando un ángulo recto.

Ejemplo 4.18 (Recta tangente a una hélice)

En este nuevo ejemplo determinaremos las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice C parametrizada por

$$C : \overrightarrow{\boldsymbol{r}}(t) = 2\cos t\,\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + t\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}},$$

en el punto $P \triangleq \sqrt{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + \sqrt{2}\,\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + \pi/4\,\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$. El valor t_0 para el cual la trayectoria pasa por este punto se deduce fácilmente de la expresión de la coordenada z. Evidentemente, es $t_0 = \pi/4$. El vector derivada se escribe como

$$\vec{\varphi}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t,\ 1) \ \rightarrow\ \vec{\varphi}'(\pi/4) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2},\ 1\right)$$

de manera que

$$\vec{l}(t) = \vec{\varphi}(\pi/4) + t\,\vec{r}'(\pi/4) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4\right) + t\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2},\ 1\right),$$

es decir

$$\vec{l}(t) = \left(\sqrt{2}(1-t), \sqrt{2}(1+t), \pi/4 - t\right).$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas serán

$$x(t) = \sqrt{2}(1-t),\ y(t) = \sqrt{2}(1+t),\ z(t) = \frac{\pi}{4} - t.$$

4.4.2 Curvas suaves

A diferencia de lo que ocurre en funciones escalares de una variable real $y = f(x)$, la existencia y continuidad de la derivada de la trayectoria no garantiza que su representación gráfica sea suave: debe cumplirse además que $\vec{\varphi}'(t) \neq \vec{0}$. Para convencernos de este resultado estudiamos dos curvas planas muy distintas entre sí: la hipocicloide de cuatro puntas y la circunferencia

Ejemplo 4.19

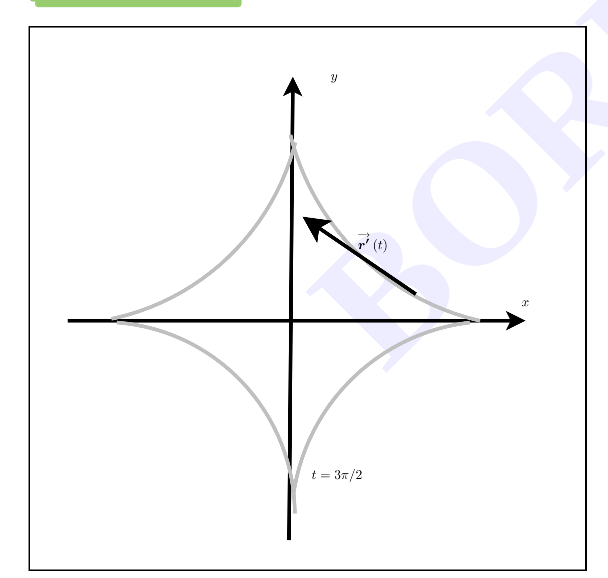


Figura 4.11: Curva hipocicloide

La *hipocicloide (de cuatro cúspides)* está parametrizada por la función vectorial continua

$$\vec{\varphi}(t) = \left(\cos^3(t), \operatorname{sen}^3(t)\right),\ t \in [0, 2\pi).$$

En este caso el vector derivada viene dado por

$$\vec{\varphi}'(t) = 3\cos(t)\operatorname{sen}(t)\left(-\cos(t), \operatorname{sen}(t)\right).$$

cuyo módulo es $\left\|\vec{\varphi}'(t)\right\| = 3\|\cos(t)\operatorname{sen}(t)\|$. Éste se anula cuando el parámetro t toma los valores $t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Y precisamente, tal como se muestra en la figura adjunta, la hipocicloide presenta cuatro puntas alrededor de dichos valores de t. Realmente podemos decir que la hipocicloide no tiene un aspecto suave; sin embargo, los arcos de curva comprendidos entre las puntas si lo son y por ello decimos que la curva es suave a trozos. En general, los puntos donde se anula la derivada se denominan **puntos cuspidales**.

La circunferencia de radio a centrada en el origen tiene por trayectoria la función vectorial $\vec{\varphi}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, cuya derivada es

$$\vec{\varphi}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \leftrightarrow \left\|\vec{\varphi}'(t)\right\| = 1.$$

Por tanto $\vec{\varphi}'(t)$ nunca se anula (si lo hiciese su norma también debería ser cero). El lector admitirá que la circunferencia tiene un aspecto «muy suave»: no presenta dobleces, cambios de dirección abruptos o puntas a lo largo de su recorrido.



Definición 4.13 (Curva suave)

Sea C una curva parametrizada por la trayectoria $\vec{\varphi}\,(t)$ definida en el intervalo real $[a,b]$. Se dice que C es suave si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

1. *$\vec{\varphi}\,(t)$ es una función vectorial de clase C^1 en (a,b),*
2. *$\vec{\varphi}'\,(t) \neq \vec{\mathbf{0}}\ \forall t \in (a,b)$.*

Si existe un número finito de puntos $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ en el intervalo (a,b) en los que se verifica que la derivada no existe, es discontinua o $\vec{\varphi}'\,(t_i) = \vec{\mathbf{0}}$ se dice que la curva C es suave a trozos. Definiendo $t_0 = a$, $t_n = b$ y C_i como el arco de curva caracterizado por

$$C_i : \vec{\varphi} : [t_{i-1}, t_i] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q, \quad \textit{con} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

la curva suave a trozos se puede expresar como unión de los arcos C_i

$$C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

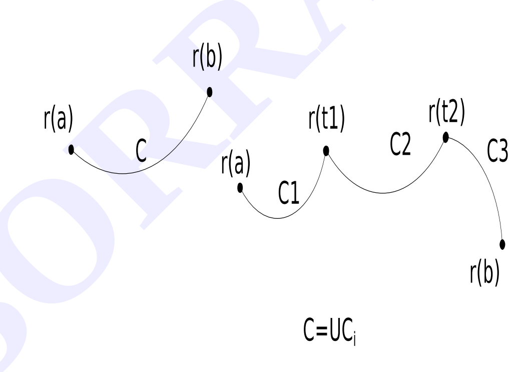


Figura 4.12: Ejemplos de curvas suaves

La figura anterior muestra ejemplos esquemáticos de un arco suave y de un arco suave a trozos, que se descompone como unión de arcos suaves. Las curvas suaves admiten un vector tangente unitario a lo largo de todo su recorrido; si la trayectoria que parametriza la curva es $\vec{\varphi}\,(t)$, dicho vector viene dado por

$$\vec{\boldsymbol{T}}\,(t) = \frac{\vec{\varphi}'\,(t)}{\left\|\vec{\varphi}'\,(t)\right\|}, \quad \forall t \in (a,b),$$

expresión que está bien definida puesto que $\vec{\varphi}'\,(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ en (a,b). Si una curva es suave a trozos,

el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)$ no está definido en los puntos $t = t_i$ donde $\overrightarrow{\varphi}'(t_i) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Definición 4.14 (Curva simple)

Una curva C suave (o suave a trozos) se denomina **simple** *si puede parametrizarse mediante una trayectoria $\overrightarrow{\varphi} : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ uno a uno en el intervalo (a, b). Esta condición garantiza que la curva no se interseca a si misma, excepto quizá en sus extremos.*

Cuando los extremos de una curva C, parametrizada por la trayectoria $\overrightarrow{\varphi}(t)$, satisfacen que $\overrightarrow{\varphi}(a) = \overrightarrow{\varphi}(b)$, la curva se denomina (obviamente) cerrada. No existe ninguna razón para que una curva cerrada no pueda ser simple; las curvas de este tipo reciben un nombre especial.

Definición 4.15 (Curva de Jordan)

Una curva C suave (o suave a trozos), cerrada y simple recibe el nombre de curva de Jordan.

Una curva simple sólo tiene dos orientaciones asociadas. Si $P \triangleq \overrightarrow{\varphi}(a)$ y $Q \triangleq \overrightarrow{\varphi}(b)$ son los puntos extremos de una curva simple abierta C, podemos considerar que la curva está dirigida desde P a Q, o viceversa. En el caso de una curva de Jordan podemos dotar a la curva de una orientación en el sentido de las agujas del reloj (negativa), o en sentido contrario a las agujas del reloj (positiva). La siguiente figura muestra varios ejemplos de curvas suaves, simple y de Jordan

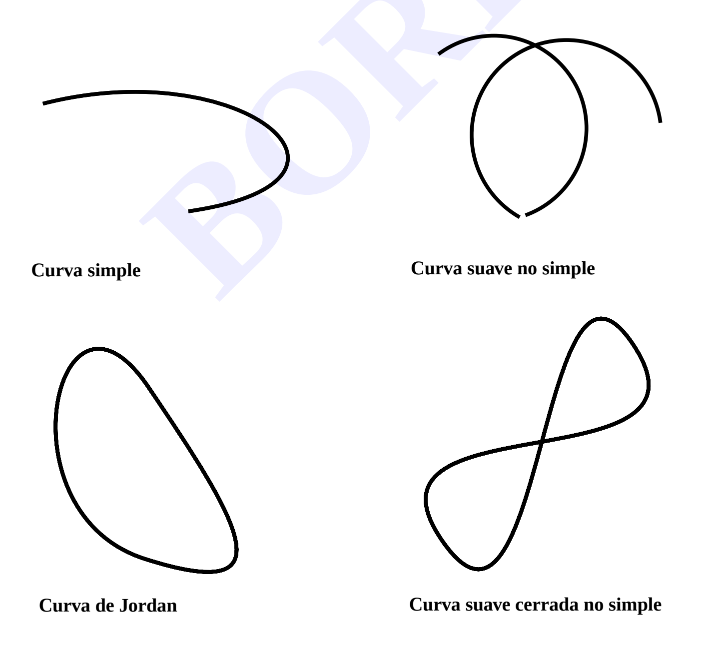


Figura 4.13: Ejemplos de curvas suaves

4.5 Integrales sobre curvas

El lector ha estudiado previamente integrales definidas en las que el dominio de integración es un intervalo de la recta real. La medida de Riemann asociada a dicho dominio es simplemente su longitud. En esta sección introduciremos integrales sobre curvas, donde el dominio de integración es un arco de curva. Como en el primer caso la medida de integración debe proporcionarnos la longitud de dicho arco, pero en esta ocasión el cálculo dista mucho de ser trivial.

4.5.1 Partición y medida de un arco

Sea C una curva suave en el espacio $\mathbb{R}^q$. Esto significa que está parametrizada por una trayectoria $\overrightarrow{\varphi} : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ de clase C^1 en (a,b), tal que su derivada no se anula en ningún punto del intervalo abierto (a,b). Como ya es habitual, denotaremos por $\overrightarrow{\varphi}(t)$ y $\overrightarrow{\varphi}'(t)$ los valores vectoriales de la trayectoria y de su derivada. Una forma de generar una partición del arco C consiste en introducir una partición $P_{[a,b]}$ del intervalo $[a,b]$ formada por n subintervalos con fronteras en los puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

lo que permite definir los puntos $A_i \triangleq \overrightarrow{\varphi}(t_i)$ sobre C y los subarcos $C_i \triangleq \widehat{A_{i-1}A_i}$, es decir, delimitados por pares de puntos sucesivos A_{i-1} y A_i.

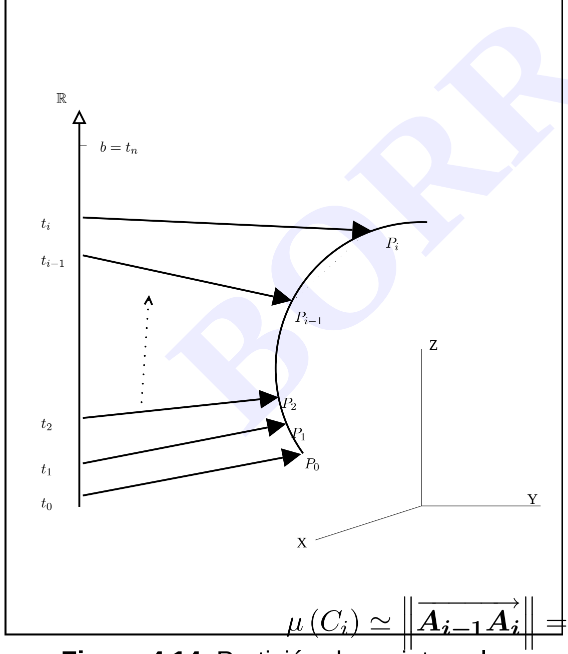


Figura 4.14: Partición de un intervalo

Entonces, el conjunto de subarcos

$$P_C = \{C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

es una partición de C. Si $\mu(C)$ es la medida o longitud de C y $\mu(C_i)$ la longitud de C_i, se cumple que

$$\mu(C) = \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i),$$

ya que la unión de los n subarcos C_i es exactamente igual a C. El objetivo ahora consiste en relacionar la medida $\mu(C_i)$ con la trayectoria $\overrightarrow{\varphi}(t)$. Podemos obtener una aproximación de la longitud del subarco C_i admitiendo que

$$\mu(C_i) \simeq \left\| \overrightarrow{\boldsymbol{A_{i-1}A_i}} \right\| = \left\| \overrightarrow{\varphi}(t_i) - \overrightarrow{\varphi}(t_{i-1}) \right\|.$$

Por otra parte, utilizando el teorema del valor medio

$$\overrightarrow{\varphi}(t_i) - \overrightarrow{\varphi}(t_{i-1}) = \overrightarrow{\varphi}'(\tilde{t}_i)\,\Delta t_i, \quad \tilde{t}_i \in (t_{i-1}, t_i),$$

donde $\overrightarrow{\varphi}(\tilde{t}_i)$ es un punto intermedio del arco C_i y $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Así,

$$\mu(C_i) \simeq \left\| \overrightarrow{\varphi}'(\tilde{t}_i) \right\| \Delta t_i,$$

y

$$\mu(C) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left\| \overrightarrow{\varphi}'(\tilde{t}_i) \right\| \Delta t_i,$$

En principio la aproximación puede parecer grosera; sin embargo, a medida que la partición de C se haga más fina de forma reiterada, los resultados serán cada vez más exactos. En efecto, si los puntos A_i se encuentren muy próximos unos a otros los arcos $\widehat{A_{i-1}A_i}$ serán indistinguibles de un pequeño segmento rectilíneo con lo cual la aproximación propuesta será cada vez mejor.

4.5.2 Longitud de arco

Utilizando nuestros conocimientos sobre integrales definidas de funciones de una variable reconocemos inmediatamente en la expresión para $\mu(C)$ una suma de Riemann correspondiente a la partición $P_{[a,b]}$ del intervalo $[a,b]$ y a la función $\left\|\vec{\varphi}'(t)\right\|$. Es decir

$$\mu(C) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left\|\vec{\varphi}'(\tilde{t}_i)\right\| \Delta t_i = \mathrm{R}\left(\left\|\vec{\varphi}'(t)\right\|, P_{[a,b]}, \{\tilde{t}\}\right),$$

y como (por hipótesis) $\left\|\vec{\varphi}'(t)\right\|$ es continua en (a,b) podemos garantizar que en el límite en que el diámetro de la partición, $\delta(P_{[a,b]}) = \mathbf{max}\{\Delta t_i\}$, es cada vez menor

$$\mu(C) = \lim_{\delta(P_{[a,b]})\to 0} \mathrm{R}\left(\left\|\vec{\varphi}'(t)\right\|, P, \{\tilde{t}\}\right) = \int_a^b \left\|\vec{\varphi}'(t)\right\| \mathrm{d}t\,.$$

Si el arco C es save a trozos y se obtiene como la unión de un número finito de arcos C_i suaves,

$$C = \bigcup_{i=i}^{n} C_i, \quad C_i : \vec{\varphi} : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

la expresión precedente se generaliza de la siguiente forma

$$\mu(C) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} \left\|\vec{\varphi}'(t)\right\| \mathrm{d}t\,.$$

Ejemplo 4.20 (Longitud de arco de una circunferencia)

Utilizaremos la expresión que acabamos de obtener para calcular la longitud de la circunferencia de radio a. Como su longitud no depende de la situación de su centro, podemos parametrizarla mediante la trayectoria

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = (acos(t), asen(t)) \ \ , \ t \in [0, 2\pi),$$

correspondiente a una circunferencia centrada en el origen. El vector derivada verifica que

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t) = (-asen(t), acos(t)) \ \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t)\right\| = \sqrt{(-asen(t))^2 + (acos(t))^2} = a.$$

Por lo tanto

$$\mu\,(C) = \int_0^{2\pi} \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t)\right\| \,\mathrm{d}t \ = \int_0^{2\pi} a \,\mathrm{d}t \ = 2\pi a,$$

que es la relación universal (e histórica) entre el radio y la longitud de una circunferencia.



Ejemplo 4.21 (Longitud de arco de una hélice)

En este ejemplo trazaremos la curva parametrizada por la trayectoria

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = (cos(t), sen(t), t)\,, \ t \in [0, 2\pi],$$

y obtendremos la longitud del arco limitado por los puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 2\pi)$.

Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = cos(t)$, $y = sen(t)$ y $z = t$. Como $x^2 + y^2 = cos^2(t) + sen^2(t) = 1$, la curva se encuentra sobre el cilindro de radio 1 y centrado en el eje Z. Según se incrementa t el punto caracterizado por $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(t)$ gira en sentido antihorario y asciende de manera que $z = t$. Fijándose en la tercera coordenada es fácil deducir que los puntos del enunciado corresponden a $t = 0$ y $t = 2\pi$, respectivamente

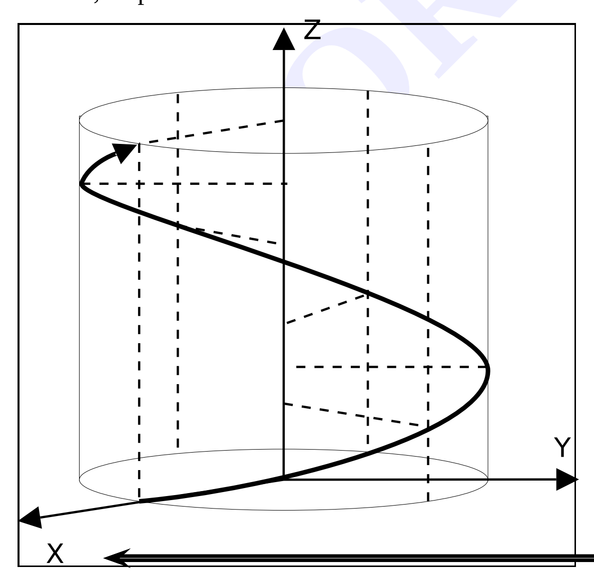


Figura 4.15: Hélice en torno al eje Z.

El aspecto de la curva C, denominada **hélice**, es el que se muestra en la figura adjunta.

Calculando el vector derivada

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t) = (-sen(t), cos(t), 1)\,,$$

su módulo

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t)\right\| = \sqrt{\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) + 1} = \sqrt{2},$$

y aplicando la fórmula de la longitud de arco, tenemos

$$s\,(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t)\right\| \,\mathrm{d}t \ = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}t$$
$$= 2\sqrt{2}\pi.$$

Cuando queremos calcular la longitud de un arco parcial, por ejemplo del arco C_t limitado por los puntos $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(a)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}\,(t)$ (con $t \in (a, b)$) se utiliza habitualmente una notación distinta

$$\mu\,(C_t) = s(t) = \int_a^t \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(u)\right\| \,\mathrm{d}u\,.$$

Derivando con respecto a t los dos miembros de la ecuación podemos obtener un resultado bastante interesante y útil. En efecto

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t \left\|\overrightarrow{\varphi}'(u)\right\| \mathrm{d}u = \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|,$$

lo que nos dice que la variación local de la longitud de arco al variar infinitesimalmente t es igual a la norma de la derivada de la trayectoria. Así

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|,$$

y claro está $ds = \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\| dt$. Encontraremos con frecuencia la siguiente notación en la literatura: $d\overrightarrow{s} = \overrightarrow{\varphi}'(t)\, dt$.

Ejemplo 4.22 (Reparametrización de una curva)

En ocasiones resulta útil expresar una curva en términos de un parámetro diferente, por ejemplo, su propia lungitud de arco. Aquí reparametrizaemos la hélice anterior en función de la longitud $s(t)$.

$$s \equiv s(t) = \int_0^t \left\|\overrightarrow{r}'(u)\right\| \mathrm{d}u = \sqrt{2}t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{2}},$$

y entonces

$$\begin{aligned}\overrightarrow{r}(t) \Rightarrow \overrightarrow{R}(s) &= \overrightarrow{r}[t(s)] \\ &= \overrightarrow{r}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

4.5.3 Integrales de línea y arco

Sean $\phi(\overrightarrow{x})$ y $\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{x})$ un campo escalar y un campo vectorial continuos sobre la curva C. Seamos más precisos con respecto al significado de esta afirmación: queremos decir que las funciones $\phi(\overrightarrow{\varphi}(t))$ y $\overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varphi}(t))$ son continuas en la variable t, es decir

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0} \phi(\overrightarrow{\varphi}(t)) &= \phi(\overrightarrow{\varphi}(t_0)) \\ \lim_{t\to t_0} \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varphi}(t)) &= \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varphi}(t_0))\end{aligned}$$

Introducimos ahora las siguientes sumas de Riemann asociadas a las dos funciones, a la partición P_C del arco de curva y al conjunto de puntos intermedios definido por la secuencia $\{\tilde{t}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathrm{R}(\phi, P, \{\tilde{t}\}) = \sum_{i=1}^{n} \phi(\overrightarrow{\varphi}(\tilde{t}_i))\,\mu(C_i) \simeq \sum_{i=1}^{n} \phi(\overrightarrow{\varphi}(\tilde{t}_i)) \left\|\overrightarrow{\varphi}'(\tilde{t}_i)\right\| \Delta t_i,$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\left(\overrightarrow{\Phi}, P, \{\tilde{t}\}\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varphi}(\tilde{t}_i)), \overrightarrow{T}(\tilde{t}_i)\right\rangle \mu(C_i) \\ &\simeq \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{\Phi}(\overrightarrow{\varphi}(\tilde{t}_i)), \overrightarrow{T}(\tilde{t}_i)\right\rangle \left\|\overrightarrow{\varphi}'(\tilde{t}_i)\right\| \Delta t_i\end{aligned}$$

Esta expresión puede transformarse aún más si tenemos en cuenta la definición del vector tangente unitario

$$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t) \,/\, \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\|,$$

de manera que

$$\mathrm{R}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}, P, \{\tilde{t}\}\right) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{t}_i)\right), \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(\tilde{t}_i)\right\rangle \Delta t_i.$$

Estudiando con detenimiento las dos expresiones es fácil darse cuenta que las funciones que aparecen dentro de los sumatorios son escalares y continuas. En efecto, $\phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right)\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\|$ es escalar y también es continua ya que los son sus dos factores: el primero por hipótesis del enuciado y el segundo porque la curva es suave. La función $\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right), \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\rangle$ es un producto escalar y es continua según los argumentos que acabamos de utilizar.

Por lo tanto, las dos sumas convergen a una integral (simple ya que las dos funciones dependen de una sola variable) en el límite en que $\Delta t = \mathbf{Sup}\,(\Delta t_i) \to 0$, y podemos escribir que

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{R}\left(\phi, P, \{\tilde{t}\}\right) &= \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right)\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\| \mathrm{d}t \\
\lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{R}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}, P, \{\tilde{t}\}\right) &= \int_a^b \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right), \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\rangle \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Definición 4.16 (Integrales de arco y línea)

Sean $\phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ *y* $\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$ *un campo escalar y un campo vectorial continuos sobre la curva suave* C *parametrizada por la trayectoria* $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}} : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$*. Definimos las siguientes integrales extendidas sobre la curva* C

1. ***Integral de arco del campo*** ϕ***:***

$$\int_C \phi\, ds = \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right)\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\| dt\,,$$

2. ***Integral de línea del campo*** $\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}$***:***

$$\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right), \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\rangle dt\,.$$

Si C *es suave a trozos y se descompone como unión de arcos suaves* $C = \cup_i C_i$*, las integrales anteriores se definen como*

$$\int_C \phi\, ds = \sum_i \int_{C_i} \phi\, ds\;,\; \int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \sum_i \int_{C_i} \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\boldsymbol{s}}\,.$$

La definición de integral extendida a una curva es una de las más importantes de este curso por lo que merece que nos dentengamos sobre ella lo que sea necesario.

- Los símbolos $\int_C \phi \, \mathrm{d}s$ y $\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$ son simplemente una notación compacta para referirnos a las verdaderas integrales que aparecen en las definiciones en los miembros de la derecha.
- Es posible encontrar otras notaciones y otras denominaciones en la literatura. Nombres comunes son integral de trayectoria o con respecto a la longitud de arco para referirse a $\int_C \phi \, \mathrm{d}s$, y circulación (del campo vectorial correspondiente) para denominar las integrales $\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$.
- Las integrales sobre curvas son integrales simples, esto es, de una sola variable. Esto es un hecho consistente dado que una curva, igual que un eje real, sólo tiene un grado de libertad.
- Si los campos están definidos en el espacio resulta factible escribir de forma más clara las definiciones anteriores sin que la notación sea muy farragosa. Sean $\phi\,(x, y, z\,)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}\,(x, y, z\,) = (\Phi_x\,(x, y, z\,)\,, \Phi_y\,(x, y, z\,)\,, \Phi_z\,(x, y, z\,))$ un campo escalar y un campo vectorial continuos sobre la curva orientada

$$C : \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = x(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + z(t)\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\,, \quad t \in [a, b].$$

Entonces la integral de arco del campo ϕ sobre C viene dada por

$$\int_C \phi \, \mathrm{d}s \; = \int_a^b \phi\,(x(t), y(t), z(t)\,)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\; \mathrm{d}t\,,$$

y la integral de línea por

$$\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \; = \int_a^b \left[\Phi_x \left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t)\right) x'(t) + \Phi_y \left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t)\right) y'(t) + \Phi_x \left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t)\right) z'(t)\right] \, \mathrm{d}t\,.$$

En algunos libros, especialmente de física, es posible encontrar otra notación; si definimos los infinitésimos $\mathrm{d}x = x'(t)dt$, $\mathrm{d}y = y'(t)dt$ y $\mathrm{d}z = z'(t)dt$, la integral de línea se reescribiría como

$$\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} \; = \int_C \Phi_x\,(x, y, z\,)\,\mathrm{d}x \; + \Phi_y\,(x, y, z\,)\,\mathrm{d}y \; + \Phi_x\,(x, y, z\,)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ejemplo 4.23 (Una integral de arco)

Evalúe la integral de arco $\int_C (2 + xy)\; \mathrm{d}S$ donde C es el semicírculo unitario superior, es decir C : $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$.

La trayectoria que parametriza la curva C, así como su derivada vienen dadas por

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))\,,\ \ \overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))\,,\ t \in [0, \pi],$$

con lo cual la norma del vector derivada es $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{r}}'\,(t)\right\| = 1$.

Como la derivada no se anula en ningún punto se trata de un arco suave. Por otro lado como el campo escalar es continuo en $\mathbb{R}^2$ lo es definitivamente sobre C, y aplicando de forma directa la definición de integral de arco de un campo escalar, resulta

$$\begin{aligned}\int_C (2+xy)\,\mathrm{d}s &= \int_0^\pi (2+x(t)^2 y(t))\,\|\vec{\boldsymbol{r}}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\pi (2+\cos(t)\operatorname{sen}(t))\,\mathrm{d}t = \left[2t - \frac{\cos^3(t)}{3}\right]_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Ejemplo 4.24 (Una integral de línea)

Sea C la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=4$ y $\vec{\boldsymbol{\Phi}}(x,y,z) = \left(2x-y, yz^2, y^2z\right)$ un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^3$. Calcule el valor de la integral de línea del campo a lo largo de C tomada en sentido positivo.

La trayectoria

$$C : \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0)\,,\quad t\in[0,2\pi],$$

dota a C de la orientación antihoraria adecuada. Para poder calcular la integral de línea necesitamos la derivada de la trayectoria

$$\vec{\boldsymbol{r}}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\,,$$

y la expresión del campo sobre los puntos de la curva

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) = (4\cos t - 2\operatorname{sen} t, 0, 0)\,.$$

Aplicando entonces definición de integral de línea, tenemos

$$\int_{C_+} \vec{\boldsymbol{\Phi}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_0^{2\pi} \left\langle \vec{\boldsymbol{\Phi}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)), \vec{\boldsymbol{r}}'(t)\right\rangle \mathrm{d}t\,,$$

donde C_+ recalca que la curva se recorre en sentido positivo. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{C_+} \vec{\boldsymbol{\Phi}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} &= \int_0^{2\pi} \langle (4\cos t - 2\operatorname{sen} t, 0, 0), (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\rangle\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (8\cos t\operatorname{sen} t - 4\operatorname{sen}^2 t)\,\mathrm{d}t = 4\pi,\end{aligned}$$

4.5.4 Influencia de la orientación de la curva

Sean ϕ y $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ un campo escalar y un campo vectorial continuos (al menos) sobre los puntos de la curva simple C parametrizada por $\vec{\boldsymbol{\varphi}} : [a,b]\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$. Sabemos que esta trayectoria induce una orientación en la curva C ya que sus puntos se recorren desde $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(a)$ a $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(b)$. Convenimos en llamar a esta orientación positiva y denotar a la curva orientada de esta forma como C_+. Ahora bien, es posible encontrar otras trayectorias que doten a la curva de la orientación opuesta. En concreto, si definimos un nuevo parámetro u mediante la transformación $t = a+b-u,\ u\in[a,b]$, la trayectoria $\vec{\boldsymbol{\zeta}}(u) = \vec{\boldsymbol{\varphi}}(t(u)) = \vec{\boldsymbol{\varphi}}(a+b-u)$ recorre la curva en sentido opuesto.

Para entender este hecho nos apoyamos en la figura y observamos que $\vec{\boldsymbol{\zeta}}(a) = \vec{\boldsymbol{\varphi}}(b)$ y $\vec{\boldsymbol{\zeta}}(b) = \vec{\boldsymbol{\varphi}}(a)$. Así, cuando u se desplaza desde a hasta b su imagen recorre la curva desde $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(b)$ hasta $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(a)$, es decir, la orientación ahora es la opuesta a C_+ y convenimos en denotar a la nueva curva orientada como C_-. Se dice que la nueva trayectoria $\vec{\boldsymbol{\zeta}}(u)$ es una reparametrización de $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(t)$ que cambia la orientación de C

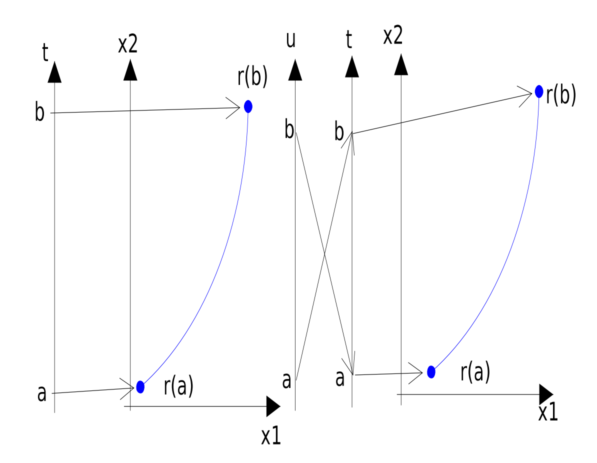


Figura 4.16: Reparametrización de una curva

Estudiemos el efecto de la orientación de la curva sobre el valor de las integrales de arco y de línea. Comencemos con las integrales de línea. Dadas dos orientaciones de una misma curva C

$$C_+ : \vec{\varphi}\,(t)\,, \quad t \in [a,b],$$
$$C_- : \vec{\zeta}\,(u)\,, \quad u \in [a,b],$$

definimos

$$\int_{C_+} \vec{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right\rangle \mathrm{d}t\,,$$
$$\int_{C_-} \vec{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\zeta}\,(u)\right), \frac{d\vec{\zeta}}{du} \right\rangle \mathrm{d}u\,.$$

Para relacionar entre sí las dos integrales debemos tener en cuenta que

$$t = a + b - u, \rightarrow du = -dt, \begin{cases} u \rightarrow a & t \rightarrow b, \\ u \rightarrow b & t \rightarrow a, \end{cases}$$

y también que

$$\frac{d\vec{\zeta}}{du} = \frac{d\vec{\varphi}\,(a+b-u)}{du} = (t = a+b-u) = \frac{d\vec{\varphi}\,(t)}{dt}\frac{dt}{du} = -\frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{C_-} \vec{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \int_a^b \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\zeta}\,(u)\right), \frac{d\vec{\zeta}}{du} \right\rangle \mathrm{d}u = \int_a^b \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\varphi}\,(a+b-u)\right), \frac{d\vec{\zeta}}{du} \right\rangle \mathrm{d}u \\ &= \int_b^a \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), -\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right\rangle \mathrm{d}(-t) = -\int_a^b \left\langle \vec{\mathbf{\Phi}}\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= -\int_{C_+} \vec{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\,. \end{aligned}$$

De forma similar, definimos las integrales de arco sobre las dos curvas orientadas

$$\begin{aligned}\int_{C_+} \phi \, \mathrm{d}s &= \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\varphi}(t)\right) \left\| \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} \right\| \mathrm{d}t\,, \\ \int_{C_-} \phi \, \mathrm{d}s &= \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\zeta}(u)\right) \left\| \frac{d\overrightarrow{\zeta}}{du} \right\| \mathrm{d}u\,,\end{aligned}$$

y procediendo de forma similar tenemos

$$\begin{aligned}\int_{C_-} \phi \, \mathrm{d}s &= \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\zeta}(u)\right) \left\| \frac{d\overrightarrow{\zeta}}{du} \right\| \mathrm{d}u = \int_b^a \phi\left(\overrightarrow{\varphi}(t)\right) \left\| -\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} \right\| \mathrm{d}(-t) \\ &= \int_a^b \phi\left(\overrightarrow{\varphi}(t)\right) \left\| \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} \right\| \mathrm{d}t = \int_{C_+} \phi \, \mathrm{d}s\end{aligned}$$

Resumimos a continuación los resultados obtenidos sobre la influencia de la parametrización en las integrals de arco y de línea.

Teorema 4.9 (Efecto del cambio de orientación sobre integrales de arco y de línea)

Sean ϕ *y* $\overrightarrow{\mathbf{\Phi}}$ *un campo escalar y un campo vectorial continuos sobre los puntos de la curva simple* C*. Si* C_+ *y* C_- *son dos orientaciones opuestas de la curva se cumple que*

$$\begin{aligned}\int_{C_+} \overrightarrow{\mathbf{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{s}} &= -\int_{C_-} \overrightarrow{\mathbf{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{s}}\,, \\ \int_{C_+} \phi \, ds &= \int_{C_-} \phi \, ds\,.\end{aligned}$$

4.5.5 Integrales de línea de campos conservativos

La propiedad más importante de los campos vectoriales conservativos se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.10 (Teorema fundamental de las integrales de línea)

Sea $\overrightarrow{\mathbf{\Phi}}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ *un campo vectorial conservativo y continuo en el interior de* D*, es decir*

- $\overrightarrow{\mathbf{\Phi}}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \overrightarrow{\mathbf{\nabla}}\phi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \quad \forall \overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathring{D}$,
- *el potencial escalar* $\phi\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)$ *es de clase* C^1 *en* $\mathring{D}$.

Entonces, si C *es una curva orientada suave (o suave a trozos), contenida en* $\mathring{D}$ *y parametrizada por la trayectoria* $\overrightarrow{\varphi} : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$*, se cumple que*

$$\int_C \overrightarrow{\mathbf{\Phi}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{s}} = \phi\left(\overrightarrow{\varphi}(b)\right) - \phi\left(\overrightarrow{\varphi}(a)\right).$$

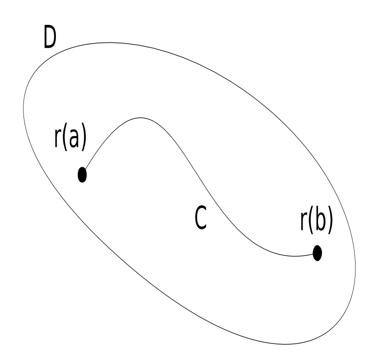


Figura 4.17: Integrales de linea de campos conservativos

Este resultado nos dice que la integral de línea de un campo vectorial conservativo sólo depende de los valores que toma el potencial en los extremos de la curva y no depende del recorrido intermedio de la misma. Por lo tanto todas las integrales de línea del campo $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ extendidas sobre curvas que tienen los mismos puntos extremos tienen el mismo valor. Otro corolario importante del teorema anterior es que la integral de línea de un campo conservativo sobre cualquier curva cerrada es nula.

Ejemplo 4.25

Com ya hemos comentado, los campos electrostático y el gravitacional son ejemplos sencillos de campos conservativos en la física. Sus integrales de línea representan el trabajo realizado para llevar una carga o una masa respectivamente desde un punto A a otro punto B, y éste (en ausencia de otras fuerzas no conservativas, como rozamiento) sólo depende de la diferencia de potencial entre dichos puntos y no del camino seguido, esto es

$$W = \int_C \vec{\boldsymbol{F}}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \Delta U,$$

donde U representa el potencial gravitatorio o electrostático.

Demostración 4.10

Utilizando la definición de integral de línea de un campo vectorial genérico tenemos

$$\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \left\langle \vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right\rangle \mathrm{d}t\,,$$

y substituyendo el campo por su definición en términos del campo escalar resulta

$$\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \left\langle \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \right\rangle \mathrm{d}t\,.$$

Por otro lado $\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ y $\vec{\varphi}\,(t)$ son de clase C^1 en $\mathring{D}$ por lo que podemos aplicar la regla de la cadena. Ésta establece que

$$\frac{d\phi\left(\vec{\varphi}\,(t)\right)}{dt} = \left\langle \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\varphi}\,(t)\right), \vec{\varphi}\,'(t) \right\rangle,$$

y por lo tanto

$$\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \frac{d\phi\left(\vec{\varphi}\,(t)\right)}{dt}\,\mathrm{d}t\,.$$

Ahora bien, la integral de una diferencial exacta es simplemente el incremento de la función en los extremos del intervalo de integración, es decir

$$\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \phi\left(\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(b\right)\right) - \phi\left(\vec{\boldsymbol{\varphi}}\left(a\right)\right).$$

Teorema 4.11

Sea $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ un campo vectorial continuo en el abierto $\mathring{D}$, que supondremos conexo. Si la integral de línea del campo sobre cualquier curva contenida en $\mathring{D}$ sólo depende de los puntos extremos de la misma y no de su recorrido se cumple que:

1. *$\vec{\boldsymbol{\Phi}}$ es conservativo, es decir $\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}}\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right),\ \forall\ \vec{\boldsymbol{x}} \in \mathring{D}$.*
2. *Si $\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$, el campo escalar $\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ se obtiene como*

$$\phi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} + k,$$

donde k es una constante real arbitraria y C es cualquier trayectoria contenida en $\mathring{D}$ que une los puntos $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ y $\vec{\boldsymbol{x}}$.

Ejemplo 4.26 (Obtención del potencial asociado a un campo vectorial)

Dado el campo vectorial $\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(x,y\right) = \left(3+2xy\right)\vec{\boldsymbol{\imath}} + \left(x-3y\right)\vec{\boldsymbol{\jmath}}$ suponga que las integrales de línea $\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = 0$ para cualquier curva cerrada en el plano. Aplique el teorema anterior para obtener el potencial del que deriva $\vec{\boldsymbol{\Phi}}$.

Elegimos como punto inicial de la curva el origen de coordenadas y lo unimos con un punto genérico de coordenadas (x,y) mediante un segmente rectilíneo C. Una parametrización sencilla de dicho segmento es

$$C:\ \vec{\boldsymbol{R}}\left(t\right) = \left(X\left(t\right), Y\left(t\right)\right) = t\left(x,y\right),\quad t \in [0,1],$$

cuyo vector derivada se escribe

$$\vec{\boldsymbol{R}}'\left(t\right) = \left(x,y\right).$$

La expresión del campo vectorial sobre los puntos del segmento C viene dada por

$$\vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{R}}\left(t\right)\right) = \left(3+2X(t)Y(t)^2, X(t)^2 - 3Y(t)^2\right) = \left(3+2xyt^2, x^2t^2 - 3y^2t^2\right),$$

de manera que la integral de línea se escribe como

$$\begin{aligned}\int_C \vec{\boldsymbol{\Phi}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} &= \int_0^1 \left\langle \vec{\boldsymbol{\Phi}}\left(\vec{\boldsymbol{R}}\left(t\right)\right), \vec{\boldsymbol{R}}'\left(t\right)\right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \left\langle \left(3+2xyt, xt-3y^2t\right), \left(x,y\right)\right\rangle \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 \left[3x + \left(3x^2y - 3y^3\right)t^2\right] \mathrm{d}t = 3x + x^2y - y^3.\end{aligned}$$

En definitiva, el potencial es

$$h\left(x,y\right) = xy - y + 3x + k,$$

y derivando parcialmente podemos comprobar que el campo vectorial deriva realmente del mismo. Se cumple en efecto que

$$\frac{\partial \phi\left(x, y\right)}{\partial x} = 3x + 2y \; ; \; \frac{\partial \phi\left(x, y\right)}{\partial y} = x - 3y.$$

Demostración 4.11

Sean $\vec{x}_0$ y $\vec{x}$ dos puntos arbitrario del interior de D y $C \subset \mathring{D}$ un arco de curva suave (o suave a trozos) que une dichos puntos. Definimos entonces la siguiente función escalar

$$\phi\left(\vec{x}\right) = \int_C \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + k,$$

que sólo depende de $\vec{x}$ (y de $\vec{x}_0$), ya que por hipótesis las integrales de línea del campo $\vec{\Phi}$ no dependen del recorrido de C, sólo de sus puntos extremos. De acuerdo con el enunciado del teorema k es cualquier número real.

Sea $\vec{x} + h\vec{e}_i$ un punto próximo a $\vec{x}$; el valor de ϕ en este punto será

$$\phi\left(\vec{x} + h\vec{e}_i\right) = \int_{C'} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + k,$$

donde C' es un arco arbitrario (contenido en el interior de D) que une $\vec{x}_0$ y el nuevo punto. Debido a la independencia del recorrido de arco podemos elegir $C' = C \cup \Delta C$, siendo ΔC el segmento de recta que une $\vec{x}$ y $\vec{x} + h\vec{e}_i$. Éste puede parametrizarse mediante la trayectoria

$$\vec{\varphi}\left(t\right) = \vec{x} + t(h\vec{e}_i), \quad t \in [0, 1],$$

cuya derivada es $\vec{\varphi}'\left(t\right) = h\vec{e}_i$.

Se cumple entonces que

$$\frac{\phi\left(\vec{x} + h\vec{e}_i\right) - \phi\left(\vec{x}\right)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{C'} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \int_C \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s}\right] = \frac{1}{h}\int_{\Delta C} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

y aplicando la definición de integral de línea

$$\frac{\phi\left(\vec{x} + h\vec{e}_i\right) - \phi\left(\vec{x}\right)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^1 \left\langle \vec{\Phi}\left(\vec{x} + th\vec{e}_i\right), h\vec{e}_i \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^1 \Phi_i\left(\vec{x} + th\vec{e}_i\right) \mathrm{d}t,$$

donde hemos usado que $\left\langle \vec{\Phi}, \vec{e}_i \right\rangle = \Phi_i$. Tomando el límite cuando $h \to 0$ en los dos miembros de la ecuación y teniendo en cuenta que el límite de una integral es la integral del límite si el integrando es una función continua, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi\left(\vec{x}\right)}{\partial x_i} &= \lim_{h\to 0} \int_0^1 \Phi_i\left(\vec{x} + th\vec{e}_i\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{h\to 0} \Phi_i\left(\vec{x} + th\vec{e}_i\right) \mathrm{d}t \\ &= \Phi_i\left(\vec{x}\right) \int_0^1 \mathrm{d}t = \Phi_i\left(\vec{x}\right). \end{aligned}$$

En definitiva, podemos escribir que

$$\vec{\Phi}\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\phi\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\left[\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{\Phi} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + k\right],$$

donde en el último miembro hemos utilizado el símbolo $\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}}$ para recalcar que la integral de línea sólo depende de los dos puntos extremos.



S 4.A Curvatura y sistema intrínseco de una curva

4.A.a Definición de Curvatura

Recordemos que si C es una curva suave caracterizada por la trayectoria $\overrightarrow{\varphi}(t)$ podemos definir en todos sus puntos un vector tangente con la misma orientación de la curva, ya que $\overrightarrow{\varphi}'(t) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ cualquiera que sea t. Normalizando este vector obtendremos un vector tangente unitario

$$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) \triangleq \frac{\overrightarrow{\varphi}'(t)}{\left\| \overrightarrow{\varphi}'(t) \right\|},$$

que indica el sentido en que recorremos la curva.

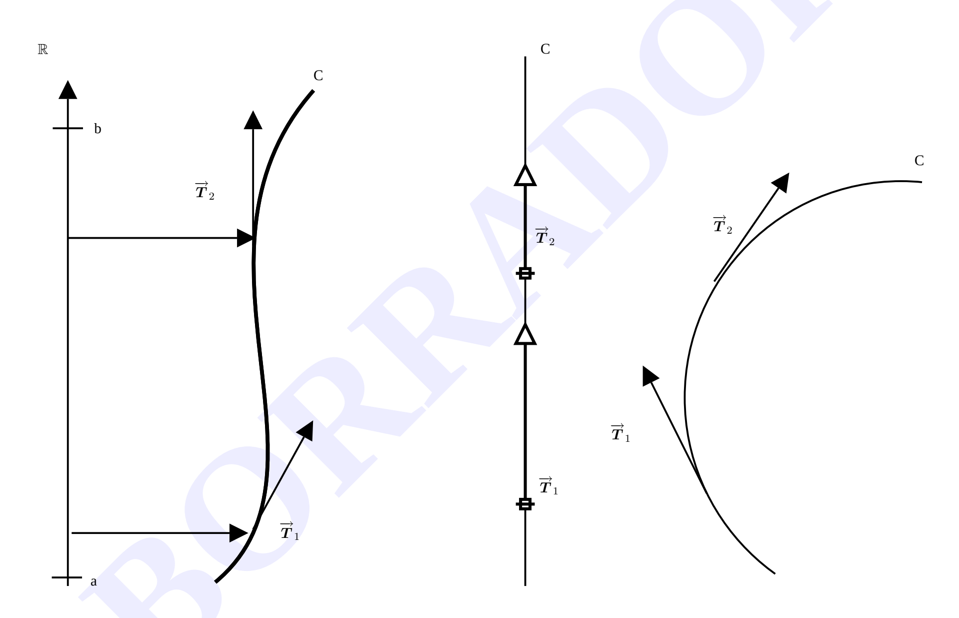


Figura 4.18: Variación del vector tangente sobre algunas curvas

La figura muestra el comportamiento de $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)$ en algunas curvas suaves. Resulta patente que este vector apenas cambia cuando la curva C se desvía poco de una recta, mientras que su variación es muy superior si la curva presenta dobleces o cambios de dirección bruscos. El concepto de curvatura de una curva en un punto pretende ser una medida de la «rapidez» con que dicha curva cambia de dirección al desplazarnos infinitesimalmente de dicho punto. La forma tradicional en que se ha definido es

$$k \triangleq \left\| \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}}{ds} \right\|$$

donde $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ es el vector tangente unitario y s es la longitud de arco. Obsérvese que se utiliza como parámetro la longitud de arco s de manera que el valor de la curvatura en un punto dado sea independiente de la parametrización elegida (frecuenemente se denomina parametrización intríseca de la curva a la que emplea la longitud de arco). Al invertir la curvatura, obtenemos el radio de curvatura de la curva en el punto dado $\rho = 1/k$.

En general no utilizaremos la longitud de arco como variable independiente de la trayectoria que parametriza una curva; por esta razón conviene reescribir la curvatura para una parametrización arbitraria $\overrightarrow{\varphi}(t)$. En este caso

$$\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}}{ds}\left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|,$$

y como la curva es suave $\left(\left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\| \neq 0\right)$ podemos escribir

$$k(t) = \left\|\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}}{ds}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)\right\|}{\left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|}.$$

Ejemplo 4.27 (Curvatura de una circunferencia)

Como un primer ejemplo, calcularemos la curvatura de una circunferencia de radio a. Un resultado razonable sería que la curvatura fuese constante y que el radio de curvatura ρ coincidiese con el radio de la circunferencia.

Suponiendo que la circunferencia tiene su centro en el origen de coordenadas, la parametrización más sencilla es

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = (a\cos(t), a\,\mathrm{sen}(t)) \;\;,\; t \in [0, 2\pi),$$

con lo cual

$$\overrightarrow{\varphi}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t)) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\| = a \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) = (-\,\mathrm{sen}(t), \cos(t))\,.$$

Derivando el vector unitario tangente resulta

$$\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt} = (-\cos(t), -\,\mathrm{sen}(t)) \Rightarrow \left\|\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}\right\| = 1,$$

y substituyendo en la expresión de la curvatura, obtenemos

$$k = \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)\right\|}{\left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\|} = \frac{1}{a} \Rightarrow \rho = a.$$

Ejemplo 4.28 (Curvatura de una cúbica alabeada)

En este ejemplo determinaremos la expresión de la curvatura de la cúbica alabeada $C : \overrightarrow{\varphi}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ en función del parámetro t. El vector derivada viene dado por

$$\overrightarrow{\varphi}'(t) = \left(1, 2t, 3t^2\right) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\varphi}'(t)\right\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4} \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) = \frac{(1, 2t, 3t)}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}.$$

El siguiente paso consiste en el cálculo de $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)$

$$\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt} = \frac{\left(-2t(-2+9t^2), -2(-1+9t^4), 6t(1+2t^2)\right)}{(1+4t+9t^4)^{3/2}},$$

y

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}\right\| = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t+9t^4)^{3/2}},$$

con lo cual la curvatura vendrá dada por

$$k = \frac{2\sqrt{1+9t^2+9t^4}}{(1+4t^2+9t^4)^{3/2}}.$$

4.A.b Triedro intrínseco de una curva

En el espacio, cualquiera que sea el punto que consideremos sobre una curva C, existen infinitos vectores ortogonales al vector tangente unitario $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$. Como este vector tiene norma constante para todo valor de t, podemos escribir que

$$\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t), \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}\right\|^2(t)}{dt} = 0 \rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) \perp \frac{d\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)}{dt}.$$

La derivada del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ no será en general un vector unitario, pero si $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'_{\neq}(t)\ \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$ podemos normalizarlo para obtener el llamado vector **normal unitario principal**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t) \triangleq \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)\right\|}.$$

También podemos expresar este vector como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t) = \frac{1}{k(t)}\frac{\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'(t)}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t)\right\|},$$

siempre que la curvatura no se anule. Es importante reseñar que el vector normal unitario principal no está definido en los puntos donde la curvatura es cero y, por tanto, no está definido en ningún punto de una recta.

El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t)$, no sólo es ortogonal a C, sino que señala la dirección y el sentido en que la curva se «dobla» cuando nos desplazamos infinitesimalmente desde el punto donde calculamos $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t)$. Para justificar tal afirmación admitiremos que las funciones componente de la trayectoria pueden desarrollarse en serie de Taylor, y por tanto la propia función vectorial admite un desarrollo de este tipo. Así

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}(t_0) + \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t_0)\,\Delta t + \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(t_0)\,\Delta t^2 + \cdots,$$

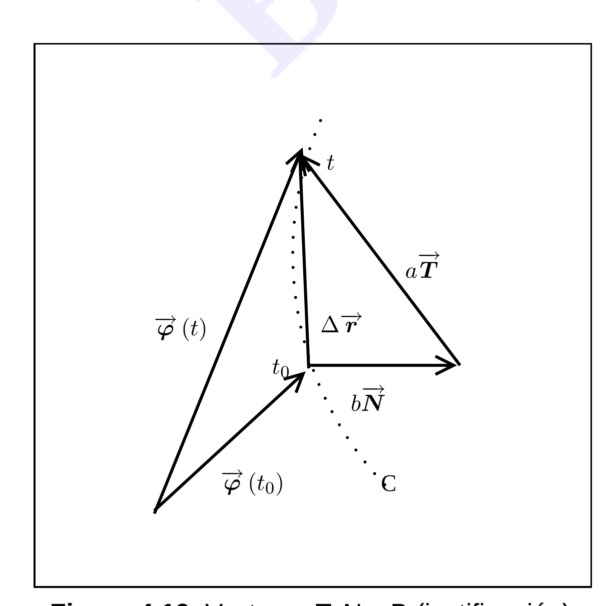


Figura 4.19: Vectores T, N y B (justificación)

donde t_0 es el punto donde calculamos los vectores unitarios $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ y $\Delta t = t - t_0$. Ahora bien,

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'(t_0) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0} \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t_0)$$

y derivando de nuevo

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}(t_0) = \left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t_0} \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t_0) + \left.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right|_{t_0} k(t_0)\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t_0),$$

e insertando estos resultados en el desarrollo en serie de la trayectoria obtenemos una ex-

presión aproximada para $\overrightarrow{\varphi}$ en términos de $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t_0)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t_0)$

$$\overrightarrow{\varphi}(t) = \overrightarrow{\varphi}(t_0) + \underbrace{\left[\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_0}\Delta t + \left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t_0}\Delta t^2\right]}_{a}\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t_0) + \underbrace{\left.\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right|_{t_0} k(t_0)\Delta t^2}_{b}\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t_0) + \cdots,$$

es decir

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\Delta\varphi}}(t_0,t) = \overrightarrow{\varphi}(t) - \overrightarrow{\varphi}(t_0) = a\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t_0) + b\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t_0) + \cdots,$$

y como $b \geq 0$ deducimos que la curva cambia localmente su dirección y sentido según $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ (como queríamos demostrar). Este resultado es además importante porque demuestra que de forma local una curva suave C siempre se encuentra en el plano formado por los dos vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$.

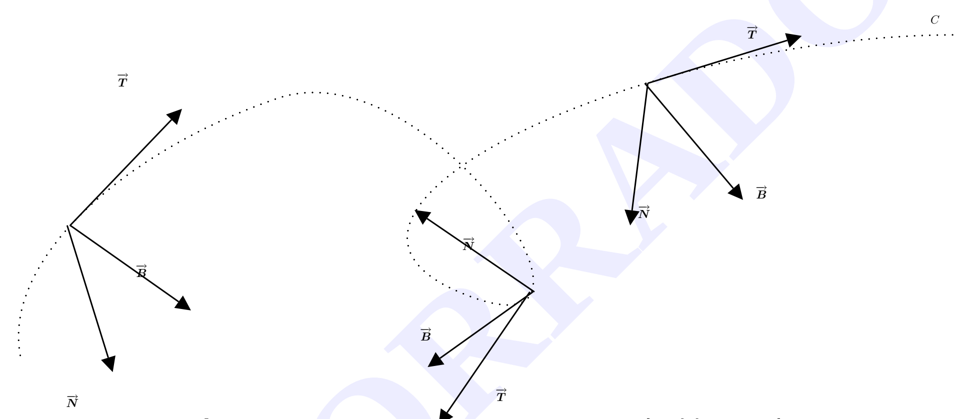


Figura 4.20: Vectores tangente, normal y binormal

En $\mathbb{R}^3$ se define además el **vector unitario binormal** $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t) \times \overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t)$, siempre que $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}(t)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}(t)$ estén definidos. En este caso, en cada punto de la curva (o lo que es lo mismo, para cada valor de t) tenemos tres vectores unitarios y ortonormales $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$, que forman el triedro intríseco de la curva en el punto dado.

Ejemplo 4.29 (Triedro intrínseco de una hélice)

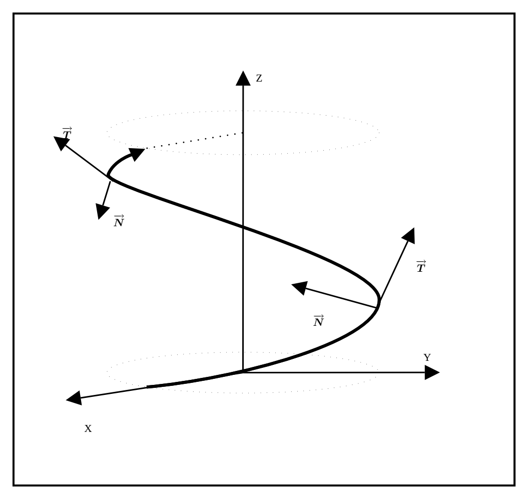


Figura 4.21: Vectores T, N y B en una hélice

Calculemos como ejemplo de aplicación de las expresiones anteriores los vectores $\overrightarrow{\boldsymbol{T}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{B}}$ del triedro intrínseco de una hélice circular dada por la ecuación vectorial

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\,(t) \;= \cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + \operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + t\overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El vector tangente y su módulo son

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t) &= -\operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + \cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + \overrightarrow{\boldsymbol{k}}, \\ \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t)\right\| &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el vector tangente unitario es

$$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}\,(t) \;= \frac{-\operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + \cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{2}}.$$

y su derivada

$$\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'_{=}\,(t)\,\frac{-\cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + -\operatorname{sen}(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}}{\sqrt{2}} \to \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{T}}'\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

con lo cual el vector normal unitario principal se escribe como

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}}\,(t) \;= -cos(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + -sen(t)\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}.$$

Por último, el vector unitario binormal viene se obtiene de la siguiente forma

$$\overrightarrow{\boldsymbol{B}}\,(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{T}}\,(t) \times \overrightarrow{\boldsymbol{N}}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} & \overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}} & \overrightarrow{\boldsymbol{k}} \\ -\operatorname{sen}(t) & -\cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 1\right).$$

Dejamos como ejercicio para el lector que verifique que los tres vectores que hemos obtenido son ortonormales y que el vector normal unitario principal está dirigido hacia el interior de la curva.



El cálculo de cantidades como la curvatura y el vector normal unitario principal, aunque directo, es en general muy farragoso; la razón se encuentra en que las componentes de un vector unitario son habitualmente fracciones con raices en el denominador. El siguiente teorema presenta una forma alternativa de calcular estas cantidades.

Teorema 4.12 (Expresiones alternativas para k y $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$)

La curvatura de una curva C suave, parametrizada por la función vectorial $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}$: $[a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ admite la siguiente expresión en términos de las derivadas de $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}$

$$k(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t) \times \overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}\,(t)\right\|}{\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t)\right\|^3}.$$

Además, si $k(t) \neq 0$, el vector unitario normal principal se escribe

$$\overrightarrow{\boldsymbol{N}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}\,(t) - \dfrac{d^2 s}{dt^2}\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}'\,(t)}{k(t)\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2}.$$

Demostración 4.12

Dado que

$$\vec{T} = \frac{\vec{\varphi}'(t)}{\|\vec{\varphi}'(t)\|}, \quad \|\vec{\varphi}'(t)\| = \frac{ds}{dt},$$

tenemos

$$\vec{\varphi}'(t) = \|\vec{\varphi}'(t)\|\,\vec{T} = \frac{ds}{dt}\vec{T},$$

de manera que derivando nuevamente con respecto a t y aplicando las reglas de derivación podemos escribir que

$$\vec{\varphi}^{(2)}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\vec{T}'.$$

Por otra parte, como $\vec{T} \times \vec{T} = \vec{0}$ resulta

$$\vec{\varphi}'(t) \times \vec{\varphi}^{(2)}(t) = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{T} \times \vec{T}',$$

y teniendo en cuenta que $\vec{T}$ es unitario y normal a $\vec{T}'$ tenemos

$$\left\|\vec{\varphi}'(t) \times \vec{\varphi}^{(2)}(t)\right\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left\|\vec{T}'\right\|,$$

lo cual conduce de forma inmediata a que

$$k(t) = \frac{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}{\|\vec{\varphi}'(t)\|} = \frac{\|\vec{\varphi}'(t) \times \vec{\varphi}^{(2)}(t)\|}{\|\vec{\varphi}'(t)\|^3}.$$

Las expresiones intermedias que obtuvimos a lo largo de la demostración nos facilitarán una nueva fórmula para el cálculo del vector normal unitario principal. En efecto, la segunda ecuación permite despejar $\vec{T}'$ como

$$\vec{T}' = \frac{\vec{\varphi}^{(2)}(t) - \frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}}{\frac{ds}{dt}},$$

y por otro lados sabemos que

$$\left\|\vec{T}'\right\| = k(t)\,\|\vec{\varphi}'(t)\| = k(t)\frac{ds}{dt},$$

con lo cual, dado que en una curva suave $\|\vec{\varphi}'(t)\| \neq 0$, podemos escribir

$$\vec{N} = \frac{\vec{\varphi}^{(2)}(t) - \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\varphi}'(t)}{k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2},$$

siempre que la curvatura no se anule.

Ejemplo 4.30 (Curvatura de la gráfica de $y = f(x)$)

Vamos a particularizar la expresión de $k(t)$ para el caso de una curva plana con ecuación $y = f(x)$. La trayectoria que define esta curva en el plano viene dada por

$$\vec{\varphi}(x) = x\vec{\imath} + f(x)\vec{\jmath},$$

con lo cual, las derivadas de la misma se escriben como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi}'(x) &= \overrightarrow{\imath} + f'(x)\overrightarrow{\jmath}, \\ \overrightarrow{\varphi}^{(2)}(x) &= 0\overrightarrow{\imath} + f''(x)\overrightarrow{\jmath}. \end{aligned}$$

Entonces $\left\|\overrightarrow{\varphi}'(x)\right\| = \sqrt{1+(f'(x))^2}$ y

$$\overrightarrow{\varphi}'(x) \times \overrightarrow{\varphi}^{(2)}(x) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\overrightarrow{k},$$

de manera que $\left\|\overrightarrow{\varphi}'(x) \times \overrightarrow{\varphi}^{(2)}(x)\right\| = |f''(x)|$. Por lo tanto

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1+(f'(x))^2\right)^{3/2}}.$$

Problemas

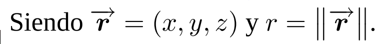

Problema 4.1 Dada la función $\overrightarrow{\varphi} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\overrightarrow{\varphi}(x,y) = \left(e^{xy}, \frac{xy}{x+y}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \ \overrightarrow{\varphi}(0,0) = (1,0),$$

se pide que: (a) estudie la continuidad de la misma y (b) obtenga la matriz de derivadas parciales.


Problema 4.2 Calcule las siguientes expresiones:

1. $\overrightarrow{\nabla}(r^n)$ con n entero positivo.
2. $\overrightarrow{\nabla}(\log\ r)$ con $r \neq 0$.
3. $\overrightarrow{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right)$ con $r \neq 0$.
4. $\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\frac{\overrightarrow{r}}{r}\right)$ con $r \neq 0$.


Siendo $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$ y $r = \|\overrightarrow{r}\|$.


Problema 4.3 Calcule, si es que existen, los campos vectoriales $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ que cumplen que $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{F}(x,y,z) = (x,y,z)$.


Problema 4.4 Sea el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(2\lambda xye^z, \lambda e^z x^2, xye^z + z^2\right)$. Determine los valores del parámetro real λ para los que existe un campo escalar $f(x,y,z)$ del que derive como un gradiente $\overrightarrow{F}$ y obtenga f.


Problema 4.5 Halle el punto de corte y el ángulo de intersección de las curvas $\overrightarrow{r_1}(t) = (e^t, 2cos(t), t-2)$ y $\overrightarrow{r_2}(u) = (u, 2, u-3)$.


Problema 4.6 Suponga que una partícula trza un arco de curva dado por la siguiente trayectoria de clase C^2 $\overrightarrow{r}(t) = \left(cos^3(t), sen^3(t)\right)$: (a) Trace de forma aproximada la curva; ¿tiene un aspecto suave? (b) Deduzca las expresiones de la velocidad, de la rapidez y de los vectores $\overrightarrow{T}$ y $\overrightarrow{N}$. (c) Obtenga la longitud de la curva.


Problema 4.7 Una partícula se mueve según la trayectoria $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos(\omega t), a\,\mathrm{sen}(\omega t), v_z t)$, con a, ω y v_z constantes, hasta el instante $t = \pi/\omega$ en que pasa a moverse libremente. (a) Calcule la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = \pi/\omega$. (b) Calcule los vectores velocidad y aceleración (y sus módulos) en cada instante de tiempo. (c) Obtenga las expresiones de los vectores tangente unitario y normal unitario principal. (d) Halle la longitud recorrida durante los intervalos de tiempo $t \in [0, \pi/\omega]$ y

$t \in [\pi/\omega, 2\pi/\omega]$.


Problema 4.8 Un alambre muy fino se encuentra sobre la circunferencia de radio a centrada en el origen. Si la densidad de masa del alambre es

$$\lambda(x,y) = K\left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right),$$

donde K es una constante positiva. (a) Halle la masa total del alambre, (b) determine las coordenadas del C.M. y (c) encuentre el momento de inercia con respecto al eje Z.


Problema 4.9 Calcule la integral de línea del campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}(x,y) = 3x^2y\,\overrightarrow{\boldsymbol{\imath}} + (x^3+2y)\,\overrightarrow{\boldsymbol{\jmath}}$ a lo largo del cuadrado con vértices $(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$ orientado positivamente.

Tema 5

Extremos de las funciones escalares

5.1 Definición de extremo local o relativo

Una de las características (geométricas) más importantes de una función son los puntos de su dominio donde la función alcanza un valor mayor o menor que en cualquier otro punto de una vecindad circundante. En dichos puntos la gráfica alcanza una cima o una sima, respectivamente. Estos puntos se llaman extremos locales de la función ; por lo tanto la noción de extremo local en cálculo de funciones multivariable es análoga a la que aparece en funciones de una sola variable, con la cual el lector se encuentra familizarizado. Sin embargo, la localización y el estudio de la naturaleza de los extremos de funciones multivariable resultan mucho más complicados; en estos apuntes introduciremos el problema y daremos los métodos de trabajo básicos.

Definición 5.1 (Extremos locales de una función)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real definida en el conjunto D. Se dice que f tiene un máximo local en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in D$ si

$$\exists\, \delta > 0 \ \backslash. \ f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \leq f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) \ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in B^*\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \delta\right) \cap D$$

Análogamente, decimos que posee un mínimo local en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in D$ si

$$\exists\, \delta > 0 \ \backslash. \ f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) \geq f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) \ \forall \vec{\boldsymbol{x}} \in B^*\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \delta\right) \cap D$$

Si las desigualdades son estrictas, los máximos o mínimos reciben el nombre de estrictos. Los máximos o mínimos locales de una función se conocen genéricamente con el nombre de extremos locales.

Ejemplo 5.1

Por lo tanto la idea de máximo local de una función es la de un «punto cúspide» de la gráfica de la función , que sobresale sobre los puntos cercanos; por el contrario, un mínimo local corresponde a una sima de la gráfica. El siguiente esquema presenta de forma sencilla la idea de máximo y mínimo locales mediante las gráficas de un paraboloide y de un paraboloide invertido.

Resulta pertinente hacer algunos comentarios sobre la definición de extremo local de una función:

- La definición anterior **no** impone ninguna condición de regularidad sobre la función f, esto es, no es necesario que sea contínua o diferenciable.

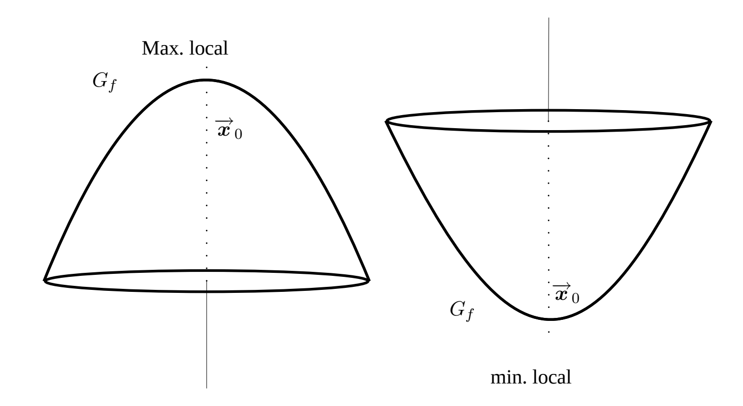


Figura 5.1: Ejemplo esquemático de máximo y mínimo locales

- Si f tiene un extremo local en $\vec{x}_0$, la condición de extremo debe cumplirse siempre que estemos suficientemente cerca del punto y con independencia de la forma en que nos aproximemos al mismo. Por esta razón, dada cualquier curva C parametrizada por $\vec{\varphi}(t)$ y tal que $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0)$ (es decir, la curva pasa por $\vec{x}_0$), la función $\phi(t) = f\left(\vec{\varphi}(t)\right)$ posee un extremo local en $t = t_0$. El recíproco es falso: la función puede presentar el comportamiento característico de un extremo al movernos sólo por determinadas trayectorias.

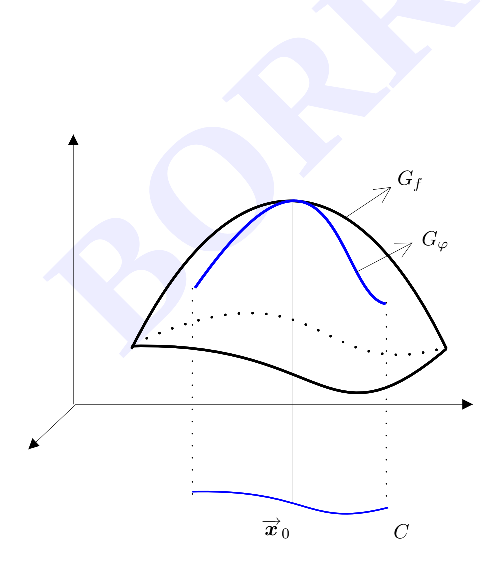


Figura 5.2: La curva C también tiene un extremo

5.2 Condición necesaria de extremo local

Definición 5.2 (Puntos críticos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto D y diferenciable (al menos) en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$. Si

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \left(\frac{\partial f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{\partial x_q}\right) = \vec{\boldsymbol{0}},$$

o de forma equivalente, si

$$\mathrm{d} f\left[\vec{\boldsymbol{x}}_0\right]\left(\vec{\boldsymbol{h}}\right) = 0,$$

decimos que $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ es un punto crítico (o estacionario) de f.

Teorema 5.1 (Condición necesaria de extremo)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto D y diferenciable en su interior. Si $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$ es un extremo local de f entonces $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \vec{\boldsymbol{0}}$.

En otras palabras, la existencia de un punto crítico de f en $\vec{\boldsymbol{x}}_0 \in \mathring{D}$ es condición necesaria (pero no suficiente) para que $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ sea un extremo local.

El recíproco es falso: no todo punto crítico es un extremo local. Estos puntos críticos se denominan puntos de silla.

Demostración 5.1

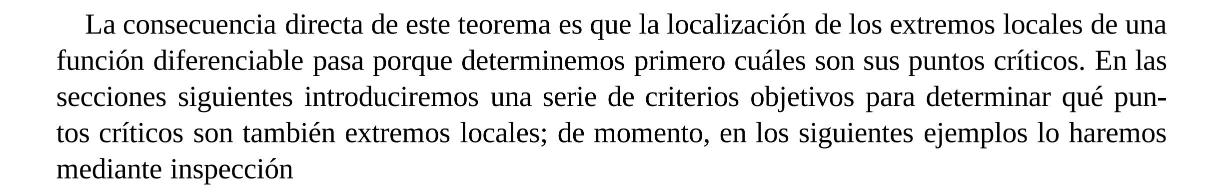
Sabemos ahora que si f tiene un extremo local en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$, la función

$$\phi(t) = f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 + t\vec{\boldsymbol{u}}\right), \quad \|\vec{\boldsymbol{u}}\| = 1,$$

que proporciona los valores de f sobre la recta de ecuación $\vec{\boldsymbol{x}}_0 + t\vec{\boldsymbol{u}}$, donde $\vec{\boldsymbol{u}}$ es un vector unitario arbitrario, también posee un extremo local en $t = 0$; por tanto $\phi'(0) = 0$. Ahora bien

$$\phi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0 - t\vec{\boldsymbol{u}}\right) - f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)}{t} = f'_u\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \left\langle \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right), \vec{\boldsymbol{u}} \right\rangle = 0,$$

y como $\vec{\boldsymbol{u}}$ es un vector arbitrario concluimos que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \vec{\boldsymbol{0}}$.



La consecuencia directa de este teorema es que la localización de los extremos locales de una función diferenciable pasa porque determinemos primero cuáles son sus puntos críticos. En las secciones siguientes introduciremos una serie de criterios objetivos para determinar qué puntos críticos son también extremos locales; de momento, en los siguientes ejemplos lo haremos mediante inspección

Ejemplo 5.2

Comprobemos con un ejemplo que la condición de punto crítico $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} f = 0$ no garantiza la existencia de un extremo (se trata de una condición necesaria pero no suficiente). Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (x, y) \longrightarrow f\,(x, y) = x - y,$$

una función diferenciable definida en todo el plano. Se cumple que

$$f'_x\,(0,0) = f'_y\,(0,0) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} f\,(0,0) = \overrightarrow{\mathbf{0}}.$$

Sin embargo

$$f\,(x,0) = x^2 \geq 0 \quad \text{y} \quad f\,(0,y) = -y \leq 0,$$

es decir, en cualquier entorno del origen hay simultáneamente puntos en los que $z > f\,(0,0)$ y puntos en los que por el contrario $z < f\,(0,0)$. Concluimos por ello que el origen de coordenadas no es un extremo de f.

Este hecho se refleja en la representación gráfica de la función en un entorno del origen. Es precisamente el aspecto de esta gráfica el que da el nombre de puntos de silla a los puntos críticos que no son extremos locales.

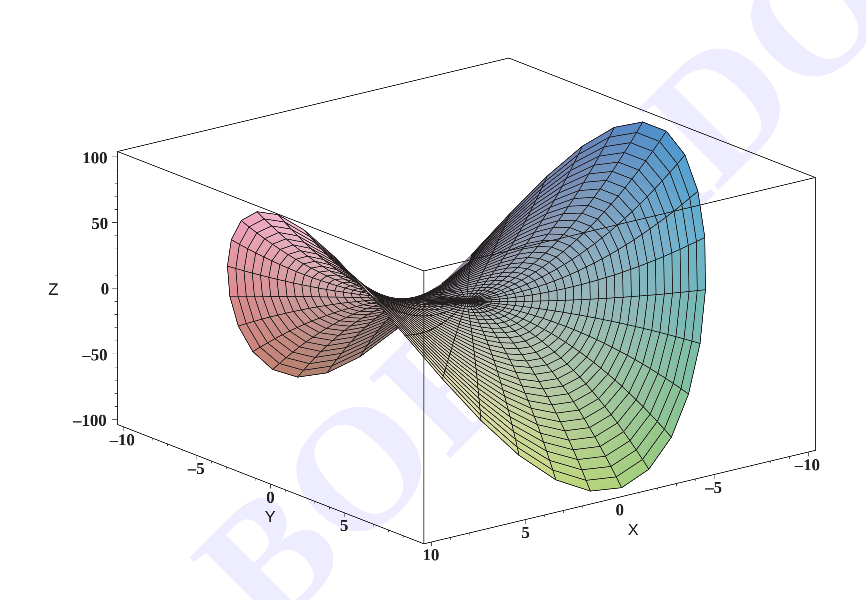


Figura 5.3:

Ejemplo 5.3

Estudie los extremos de la función $f(x,y) = 2x + y - xy - 7y$.

Dado que la función es diferenciable en el plano podemos iniciar la localización de sus extremos buscando los puntos críticos de f; con ese fin planteamos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} f'_x &=& 4x - y \\ f'_y &=& 2y - x - 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\vec{\nabla} f = \vec{0}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x - y = 0 \\ 2y - x = 7 \end{array}\right. .$$

Resolviendo el sistema encontramos que la función posee un único punto crítico en $(x_0, y_0) = (1,\ 4)$; si la función posee un extremo local deberá coincidir con este punto. Para verificarlo estudiemos el incremento local de la función cuando nos movemos cerca de (x_0, y_0); tenemos

$$\Delta f = f(1 + h_x, 4 + h_y) - f(1,4) = 2h_x^2 + h_y^2 - h_x h_y,$$

y definiendo $(h_x, h_y) = h(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

$$\Delta f = h\left[2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta\right] = h\left[\cos\theta + \left(1 - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)\right] \geq 0.$$

Por lo tanto, el punto $(1,\ 4)$ es un mínimo local de la función correspondiente al valor $f(1,4) = -14$. Obsérvese el carácter cóncavo de la gráfica de la función cerca de dicho punto lo que le confiere un aspecto tatalmente distinto al de la gráfica del ejemplo precedente.

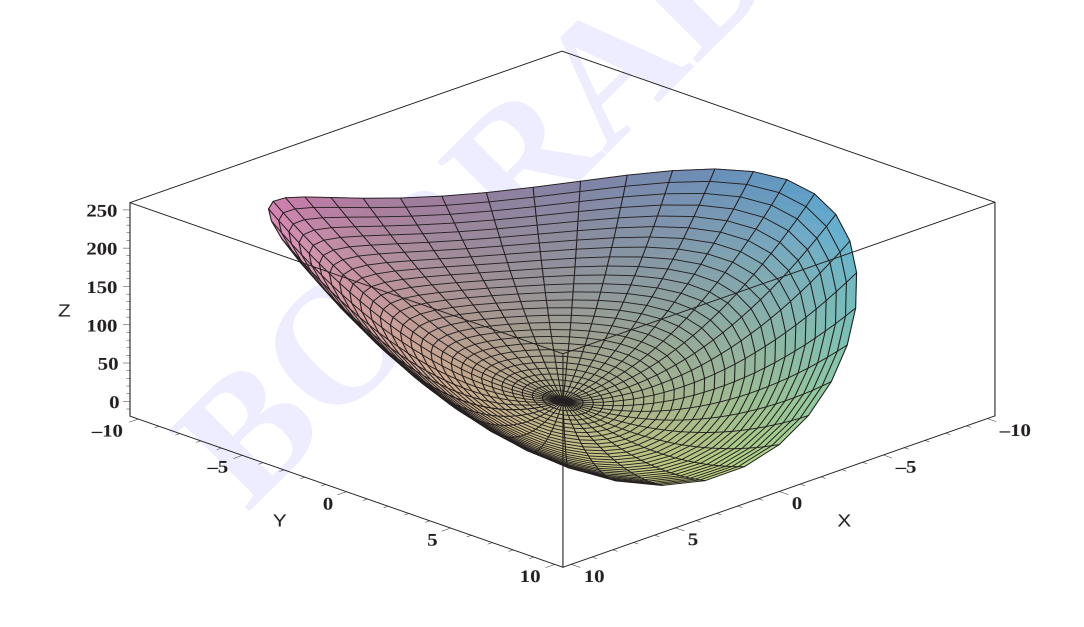


Figura 5.4:

Ejemplo 5.4

Estudie los extremos locales de la función

$$f\,(x,y) = y - xy + 2x + y + 1.$$

Como en el ejemplo precedente estudiamos la existencia de puntos críticos de la función , cuyas coordenadas serán las soluciones del siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{lcl} f'_x &=& -y+2 \\ f'_y &=& 2y-x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -y+2=0 \\ 2y-x=1 \end{array}\right. \Rightarrow (x_0,y_0) = (5,2)\,.$$

Estudiando ahora el comportamiento del incremento de la función cuando nos movemos cerca del punto crítico podremos determinar si se trata de un extremo o de un punto de silla. En efecto

$$\Delta f = f\,(5+h_x, 2+h_y) - f\,(5,2) = h_y - h_x h_y = h\,\mathrm{sen}\,\theta\,[\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta]\,,$$

donde hemos tomado $(h_x, h_y) = h\,(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta)$. El incremento se escribe de forma más compacta como

$$\Delta f\ = h\chi\,(\theta)\,,$$

donde la función dependiente del ángulo puede reexpresarse así

$$\chi\,(\theta) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right).$$

Es claro que $\chi\,(\theta)$ toma valores positivos y negativos dependiendo de la dirección en que nos movamos, por lo que el punto crítico es un punto de silla.

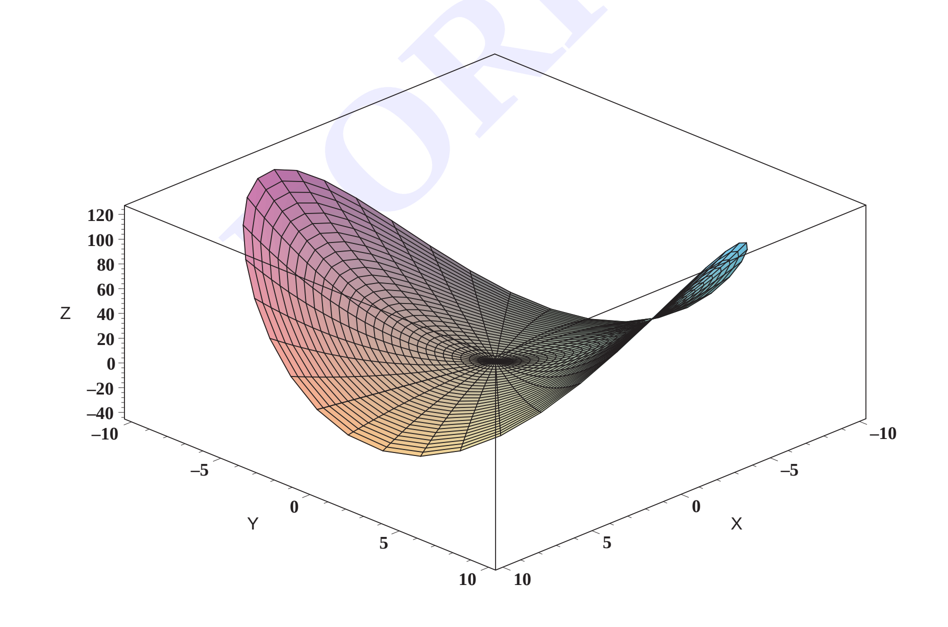


Figura 5.5:

5.3 Condición suficiente de extremo

En esta sección deduciremos un criterio de suficiencia, basado en las derivadas de segundo orden, que permita determinar si un punto crítico es un extremo local de la función . Por supuesto, en el caso de funciones de una sola variable deberá reducirse a las condiciones que ya conocemos, esto es, que $f''_x > 0$ para un mínimo local estricto y $f''_x < 0$ para un máximo estricto.

5.3.1 Desarrollo de Taylor alrededor de un punto crítico

No debemos perder de vista que el objetivo de nuestro estudio es la variación del valor de la función cuando nos separamos de forma arbitraria de un punto crítico una distancia infinitesimal. La forma más general de desarrollar esta tarea consiste en utilizar el desarrollo de Taylor alrededor del punto crítico. Empecemos por considerar una función $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en D y de clase C^2 en $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$. Si $\vec{x}_0$ es un punto crítico de la función resulta que

$$\vec{\nabla} f\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0} \ \text{ ó } \ \mathrm{d}f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) = 0, \quad \forall \vec{h}.$$

Por lo tanto el desarrollo de Taylor hasta orden dos vendrá dado por

$$f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f\left(\vec{x}_0\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|^2\right),$$

siempre que la diferencial de segundo orden no se anule en el punto crítico[1]. Entonces, el incremento de la función para $\left\|\vec{h}\right\| \ll 1$ se escribe como

$$\Delta f = f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f\left(\vec{x}_0\right) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) + \boldsymbol{o}\left(\left\|\vec{h}\right\|^2\right).$$

Conviene distinguir entre la dirección orientada del vector y su módulo; para ello introducimos $\vec{h} = \varepsilon \vec{u}$ con $\left\|\vec{u}\right\| = 1$. Así

$$\Delta f = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right) + 2\frac{\boldsymbol{o}\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon^2}\right),$$

y considerando valores de ε suficientemente pequeños de manera que

$$\left|\frac{\boldsymbol{o}\left(\varepsilon^2\right)}{\varepsilon^2}\right| \ll \left|\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right)\right|,$$

obtenemos

$$\Delta f \simeq \frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right).$$

Ademas, como $\varepsilon^2 > 0$

$$\operatorname{sgn}\left(\Delta f\right) = \operatorname{sgn}\left(\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right)\right),$$

donde sgn es la función que nos proporciona el signo de su argumento. En definitiva lo que hemos demostrado es que cuando nos separamos de un punto crítico una distancia suficientemente pequeña en la dirección dada por $\vec{u}$, el signo del incremento de f coincide con el de $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right)$.

[1] De ahora en adelante, salvo que se diga explícitamente lo contrario, supondremos que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{h}\right) \neq 0$

En el caso de funciones de una variable la diferencial segunda viene dada por $\mathrm{d}^2 f\left[x_0\right](h) = f^{(2)}\left(x_0\right) h$, y como $h^2 > 0$ el signo de la diferencial coincide con el de la derivada segunda. De esta forma, si $f^{(2)}\left(x_0\right) > 0$ el incremento de la función es positivo y estamos en presencia de un mínimo local. Análogamente, si $f^{(2)}\left(x_0\right) < 0$ el incremento de la función es negativo y x_0 es un máximo local.

La situación se complica enormemente cuando tratamos con funciones multivariable,ya que la diferencial de orden dos es un polinomio de segundo grado en las componentes del incremento $\overrightarrow{\boldsymbol{h}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$. Los conocimientos adquiridos en cursos de álgebra lineal sobre formas cuadráticas son una ayuda inestimable para resolver el problema

5.3.2 La diferencial segunda como forma cuadrática

La matriz de derivadas parciales de segundo orden de la función f, evaluada en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$

$$H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & f^{(2)}_{x_i x_j}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{i,j=1,2,\ldots,q}$$

recibe el nombre de matriz Hessiana de la función f en el punto $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0$. Utilizando $H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right)$ y la matriz columna asociada a las componentes $u_1, u_2, \cdots, u_q$ del vector unitario $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix},$$

podemos reescribir la diferencial de orden dos como

$$\mathrm{d}^2 f\left[\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right]\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) = \sum_{i,j=1}^{q} \left(H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right)\right)_{ij} u_i u_j = u^T H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) u.$$

Por lo tanto la diferencial de segundo orden es una forma cuadrática en las variables $u_1, u_2, \cdots, u_q$. Además, como las derivadas cruzadas de las funciones C^2 son iguales, la matriz Hessiana es simétrica y por lo tanto diagonalizable mediante una transformación ortogonal real O (una matriz de entradas reales que verifica que $O^T O = O O^T = 1$). Es decir, existe una relación de la forma

$$H_f \Rightarrow O H_f O^T = \Lambda = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_q\right),$$

donde $\{\lambda_i\}_{i=1,2,\ldots,q}$ son los autovalores (reales) de la matriz H_f.

Resulta conveniente definir una nueva matriz columna v, cuyas componentes vienen dadas por la relación$u = Ov$. Introduciendo la definición de v en la expresión de la diferencial tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f\left[\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right]\left(\overrightarrow{\boldsymbol{u}}\right) &= u^T H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) u = v^T O^T H_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) O v \\ &= v^T \Lambda v = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \cdots + \lambda_q v_q^2, \end{aligned}$$

con lo cual hemos logrado expresar la diferencial de orden dos como una suma de cuadrados cuyos coeficientes son los autovalores λ_i de la matriz Hessiana, que pueden ser positivos, negativos o cero.

Ejemplo 5.5

Sea $F(u_x, u_y) = u^T Q u$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ donde las matrices 2×2

$$u^T = (u_x, u_y) \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{xy} & q_{yy} \end{pmatrix},$$

tienen entradas reales (es decir, u_α, $q_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$).

Como Q es una matriz real y simétrica existe una matriz ortogonal real de dimensión dos

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ (-1)^\phi \operatorname{sen}\theta & (-1)^{\phi+1}\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \phi = 1, 2,$$

tal que

$$OQO^T = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Expresando este resultado en términos de ecuaciones escalares, resulta

$$\begin{gathered} q_{xx}\cos^2\theta + q_{yy}\operatorname{sen}^2\theta + (-1)^\phi q_{xy}\operatorname{sen}2\theta = \lambda_1, \\ q_{xx}\cos^2\theta + q_{yy}\operatorname{sen}^2\theta - (-1)^\phi q_{xy}\operatorname{sen}2\theta = \lambda_2, \\ \frac{q_{xx} - q_{yy}}{2}\operatorname{sen}2\theta + (-1)^\phi q_{xy}\cos 2\theta = 0. \end{gathered}$$

La última ecuación permite determinar el valor de θ y substituyendolo en las otras dos ecuaciones obtendremos los autovalores de la matriz Q. La matriz O nos permite definir un nueva matriz columna v cuya relación con u es

$$v = Ou, \Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ (-1)^\phi \operatorname{sen}\theta & (-1)^{\phi+1}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

ó

$$u = O^T v, \Longrightarrow \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & (-1)^\phi \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & (-1)^{\phi+1}\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$F(u_x, u_y) = u^T Q u = v^T \Lambda v = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2.$$

Es muy instructivo clarificar el significado geométrico de la transformación de coordenadas asociada a la matriz O. Con este fin estudiamos la transformación de los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$. Así, definimos

$$\begin{gathered} \vec{\imath} \xrightarrow{O} \vec{\zeta}_1 \\ \vec{\jmath} \xrightarrow{O} \vec{\zeta}_2 \end{gathered}$$

Utilizando la matriz O y la forma matricial de los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$, obtenemos

$$\vec{\zeta}_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), \quad \vec{\zeta}_2 = \left((-1)^\phi \operatorname{sen}\theta, (-1)^{\phi+1}\cos\theta\right),$$

expresiones que indican que los nuevos vectores corresponden a una rotación antihoraria de ángul θ. La figura muestra, para $\phi = 1$, la rotación de los dos vectores de la base, lo que demuestra claramente que la matriz O está asociada a una rotación de los ejes del sistema de referencia.



Figura por hacer

Figura 5.6: Rotación de los vectores de la base.

5.3.3 Criterio de suficiencia de la diferencial segunda

Podemos utilizar el comportamiento de la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$, caracterizada por la matriz de autovalores Λ

$$\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right) = u^T H_f\left(\vec{x}_0\right) u = v^T \Lambda v,$$

para determinar la naturaleza del punto crítico. En efecto, podemos considerar los siguientes casos excluyentes entre sí:

1. Todos los autovalores λ_i de la matriz Hessiana son positivos, lo cual implica que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right) > 0 \quad \forall \vec{u}$. En este caso se dice que la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$ es **definida positiva**.

   Cuando el desplazamiento $\varepsilon = \left\|\vec{x} - \vec{x}_0\right\|$ es suficientemente pequeño se cumple que $\Delta f > 0 \ \forall \vec{x} \in B^*\left(\vec{x}_0, \varepsilon\right)$, de forma que $\vec{x}_0$ es un mínimo local estricto.

2. Todos los autovalores λ_i de la matriz Hessiana son negativos, y por lo tanto $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right) < 0 \quad \forall \vec{u}$. En este caso se dice que la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$ es **definida negativa**.

   Si ε es suficientemente pequeño se cumple que $\Delta f < 0 \ \forall \vec{x} \in B^*\left(\vec{x}_0, \varepsilon\right)$, con lo cual $\vec{x}_0$ es un máximo local estricto.

3. La matriz Hessiana posee q_+ autovalores positivos y q_0 autovalores nulos ($q_+, q_0 > 0,\ q_+ + q_0 = q$). Se dice entonces que la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$ es **semidefinida positiva**.

   En este caso se cumple que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{u}\right) \geq 0 \quad \forall \vec{u}$. Sin embargo el criterio no proporciona la información necesaria para determinar si $\vec{x}_0$ es un extremo porque existen q_0 direcciones independientes, dadas por los autovectores $\vec{\zeta}_i$ asociados a los autovalores nulos, tales que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{\zeta}_i\right) = 0$. En consecuencia es necesario acudir a las diferenciales de orden superior para determinar la naturaleza de $\vec{x}_0$.

   Cuando la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$ es **semidefinida negativa**, un razonamiento análogo nos lleva a la misma conclusión: resulta imprescindible acudir a términos de orden superior en el desarrollo de Taylor.

4. La matriz Hessiana posee q_+ autovalores positivos, q_- autovalores negativos y q_0 autovalores nulos ($q_+, q_- > 0,\ q_+ + q_- + q_0 = q$). Se dice entonces que la diferencial segunda de la función en $\vec{x}_0$ no es **definida** ni **semidefinida**.

   En esta situación existen q_+ direcciones orientadas $\vec{\zeta}_i^{\,+}$, definidas por los autovectores de los autovalores positivos, tales que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{\zeta}_i^{\,+}\right) > 0$ y q_- direcciones orientadas independientes, correspondientes a los autovectores de autovalor negativo, tales que $\mathrm{d}^2 f\left[\vec{x}_0\right]\left(\vec{\zeta}_i^{\,-}\right) < 0$. Al desplazarnos según las primeras direcciones la función presenta en $\vec{x}_0$ un comportamiento de mínimo. Se comporta por el contrario como si tuviese un máximo cuando nos movemos según el otro conjunto de direcciones. En consecuencia el punto crítico $\vec{x}_0$ es un punto de silla.

Estos resultados se resumen en el siguiente teorema que resume la condición suficiente de extremo local

Teorema 5.2 (Criterio general de la diferencial segunda)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $\vec{x}_0 \in \mathring{D}$ un punto crítico de la función . Si la diferencial segunda de f en $\vec{x}_0$ es:

1. ***definida positiva**, el punto crítico es un mínimo local estricto,*
2. ***definida negativa**, el punto crítico es un máximo local estricto,*
3. ***semidefinida**, no se tiene información suficiente para determinar la naturaleza del punto crítico.*

*En cualquier otro caso, esto es, si la diferencial no es **definida** ni **semidefinida** el punto crítico es un punto de silla.*

Ejemplo 5.6

Intentaremos clarificar estas ideas en el caso de una función definida en $\mathbb{R}^2$ y con la ayuda de los resultados del ejemplo 5.5 . Sea (x_0, y_0) un punto crítico de la función f y $\Delta f = f\left(x_0 + h_x, y_0 + h_y\right) - f\left(x_0, y_0\right)$ el incremento de la función cuando nos desplazamos del punto crítico. Admitamos que

$$\Delta f \simeq \frac{\varepsilon^2}{2}\mathrm{d}^2 f\left[(x_0, y_0)\right](u_x, u_y) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^T H u,$$

donde $(h_x, h_y) = \varepsilon\,(u_x, u_y)$. Entonces:

1. Si la diferencial es definida positiva los autovalores de H son positivos ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) y por tanto

$$\Delta f\,(u_x, u_y) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 > 0,$$

   cualesquiera que sean (v_1, v_2), o lo que es lo mismo cualquera que sea $\vec{u}$.

2. Si la diferencial es definida la matriz H posee autovalores negativos. Como $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, la forma cuadrática cumple que

$$\Delta f\,(u_x, u_y) = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 < 0,$$

   cualquiera que sea la dirección en que nos desplacemos, es decir, cualquiera que sea $\vec{u}$.

3. Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$, en cuyo caso la diferencial segunda es semidefinida positiva, no es posible afirmar que $\Delta f\,(u_x, u_y)$ toma simepre valores positivos o negativos. Por el contrario existen dos direcciones orientadas ortogonales para las que el comportamiento es radicalmente distinto:

Para $v_1^T = (1,0) \equiv \vec{\boldsymbol{u}}_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ se cumple que $\Delta f\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1\right) = \lambda_1 > 0$. Así, en esta dirección el comportamiento de f es el de un mínimo ya que $\Delta f > 0$.

Para $v_2^T = (0,1) \equiv \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left((-1)^{\phi}\operatorname{sen}\theta, (-1)^{\phi+1}\cos\theta\right)$ tenemos que $\Delta f\left(\vec{\boldsymbol{u}}_2\right) = \lambda_2 = 0$. En este caso no podemos saber cual es el comportamiento de la función ya que el signo de Δf viene definido por términos de orden superior del desarrollo de Taylor.

4. Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$ la diferencial segunda no es definida ni semidefinida. Como en el apartado precedente existen dos direcciones orientadas ortogonales en las que el incremento de la función es muy distinto.

   Si $v_1^T = (1,0) \equiv \vec{\boldsymbol{u}}_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces $\Delta f\left(\vec{\boldsymbol{u}}_1\right) = \lambda_1 > 0$. Así, en esta dirección el comportamiento es el de un mínimo ya que $\Delta f > 0$.

   Si $v_2^T = (0,1) \equiv \vec{\boldsymbol{u}}_2 = \left((-1)^{\phi}\operatorname{sen}\theta, (-1)^{\phi+1}\cos\theta\right)$, entonces $\Delta f\left(\vec{\boldsymbol{u}}_2\right) = \lambda_2 < 0$, con lo que la función se comporta como si tuviese un máximo en (x_0, y_0).

   Dado que dependiendo de la dirección en que nos alejemos del punto crítico el incremento de la función es positivo o negativo, dicho punto es necesariamente un punto de silla

La figura muestra (para $\phi = 1$) las dos direcciones ortogonales en las que el comportamiento de Δf es diferente cuando la diferencial de orden dos no es definida.



5.3.4 Criterio de la diferencial segunda en $\mathbb{R}^2$

La gran ventaja que presenta este caso es que podemos determinar con sencillez la naturaleza de un punto crítico a partir de los elementos de matriz de la matriz Hessiana evaluada en dicho punto, sin necesidad de diagonalizarla. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y (x_0, y_0) un punto crítico de la misma. Se cumple entonces que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(x_0, y_0\right) = (0,0)$ y

$$\begin{aligned}\Delta f &= f\left(x, y\right) - f\left(x_0, y_0\right)\\ &= \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)\begin{pmatrix} f_x^{(2)}\left(x_0, y_0\right) & f_{xy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) \\ f_{xy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) & f_y^{(2)}\left(x_0, y_0\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0\end{pmatrix} + \ldots.\end{aligned}$$

Debido a la invariancia frente a cambios de base de las operaciones traza y determinante, podemos escribir

$$\operatorname{Tr}H\left(x_0, y_0\right) = f_{xx}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) + f_{yy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\det H\left(x_0, y_0\right) = f_{xx}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) f_{yy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) - f_{xy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right)^2 = \lambda_1\lambda_2,$$

donde, según la notación habitual, λ_1 y λ_2 son los autovalores de la matriz Hessiana. De manera frecuente se denomina **discriminante** $D\left(x_0, y_0\right)$ al determinante de la matriz Hessiana en el punto crítico (x_0, y_0).

Consideremos ahora los siguientes casos:

- $D\left(x_0, y_0\right) > 0$ y $f_{xx}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) > 0$; entonces

$$\begin{aligned} D\left(x_0, y_0\right) > 0 &\implies f_{xx}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) f_{yy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) > 0,\\ f_{xx}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) > 0 &\implies f_{yy}^{(2)}\left(x_0, y_0\right) > 0,\end{aligned}$$

  con lo cual tenemos que $D\left(x_0, y_0\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$ y $\operatorname{Tr}H\left(x_0, y_0\right) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$. Resulta evidente entoces que λ_1 y λ_2 son positivos. Por lo tanto H es definida positiva y (x_0, y_0) es un mínimo local estricto.

- $D(x_0, y_0) > 0$ y $f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0) < 0$. Un razonamiento totalmente análogo nos permite ver que H es definida negativa y (x_0, y_0) es un máximo local estricto.
- $D(x_0, y_0) = 0$. Esto implica que al menos uno de los autovalores de H es nulo y la matriz es semidefinida. En consecuencia el criterio basado en la diferencial segunda es insuficiente para caracterizar el punto crítico. Este tipo de puntos críticos se llaman degenerados y en este curso habrá que examinarlos caso por caso para determinar el comportamiento de la función.
- $D(x_0, y_0) < 0$. Esto implica que los dos autovalores de H tienen signos opuestos por lo que la matriz H no es ni definida ni semidefinida, y el punto crítico es un punto de silla.

Teorema 5.3 (Criterio de las derivadas segundas en $\mathbb{R}^2$)

Sea $z = f(x, y)$ una función de clase C^2 y (x_0, y_0) un punto crítico de la función . Dependiendo de los signos del discriminante y de $f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0)$ tenemos:

$D(x_0, y_0) > 0$	$f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0) > 0$	(x_0, y_0) **es un mínimo local estricto**
	$f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0) < 0$	(x_0, y_0) **es un máximo local estricto**
$D(x_0, y_0) = 0$	$\forall\ f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0)$	(x_0, y_0) **es un punto crítico degenerado**
$D(x_0, y_0) < 0$	$\forall\ f^{(2)}_{xx}(x_0, y_0)$	(x_0, y_0) **es un punto de silla**

Ejemplo 5.7

Estudie los puntos críticos, extremos locales y puntos de silla de la función $f(x, y) = x^3 + y - 3xy$.

La función es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ por lo que aplicaremos los criterios basados en las condiciones necesaria y suficiente de extremo local. Así, para localizar los puntos críticos partimos del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 3x - 3y \\ f'_y = 3y - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 3x - 3y \\ 0 = 3y - 3x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = x \\ x = y \end{array}\right\}$$

y substituyendo una ecuación en otra

$$y = y^4 \to \left\{\begin{array}{l} y = 1 \to y = 1 \\ y = 0 \end{array}\right. .$$

Por lo tanto tenemos dos puntos críticos $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Apliquemos ahora el criterio de la diferencial segunda para determinar la naturaleza de los dos puntos críticos; las derivadas segundas vienen dadas por

$$f^{(2)}_x = 6x,\ f^{(2)}_{xy} = -3,\ f^{(2)}_y = 6y,$$

de manera que

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$

Substituyendo las coordenadas de los puntos críticos resulta

$$\begin{array}{llll} f^{(2)}_x(0,0) = 0, & D(0,0) = -9 & \Rightarrow & (0,\ 0) \text{ punto de silla,} \\ f^{(2)}_x(1,1) = 6 > 0, & D(1,1) = 25 > 0 & \Rightarrow & (1,\ 1) \text{ mínimo local estricto.} \end{array}$$

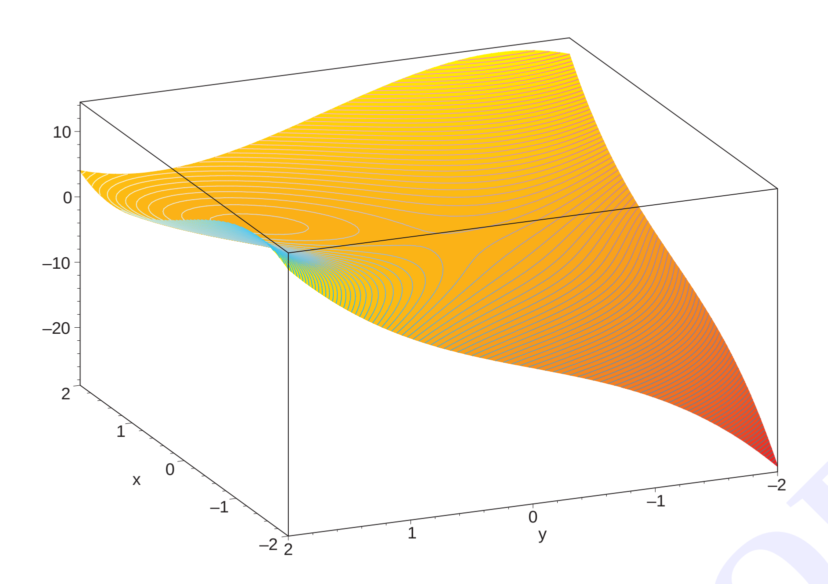


Figura 5.7: Extremos y puntos de silla de la función propuesta

5.4 Extremos absolutos

El estudio de las funciones de una variable real muestra que toda función continua en un intervalo cerrado I alcanza su máximo y su mínimo absolutos en dicho intervalo. El teorema 5.4 muestra que en $\mathbb{R}^q$ se tiene un resultado análogo.

Definición 5.3

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto D. Decimos que $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0 \in D$ es el máximo absoluto (mínimo absoluto) de f en D si $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) \geq f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \quad \forall \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D \quad (f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right) \leq f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \quad \forall \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D)$.

Una vez definido el concepto de extremo absoluto de una función en un conjunto de $\mathbb{R}^q$ pasamos a enunciar el teorema de Weierstrass

Teorema 5.4 (Teorema generalizado de Weierstass)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el conjunto compacto D; entonces f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en D, es decir existen dos puntos $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1, \overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2 \in D$ tales que $f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_1\right) \leq f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \leq f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_2\right), \quad \forall \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in D$.

Considerando que cualquier región compacta $D \subset \mathbb{R}^q$ puede descomponerse como la unión de un conjunto abierto A y su frontera ∂A, el método para encontrar los extremos absolutos de una función en dicha región consiste en los pasos que se enumeran en el siguiente teorema

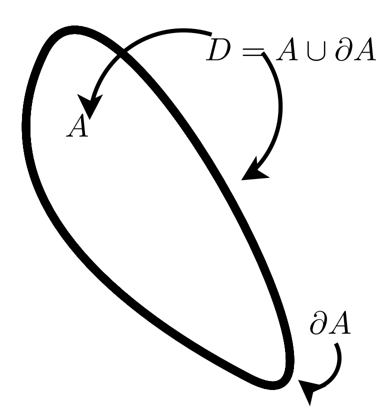


Figura 5.8: Región compacta en el plano

Teorema 5.5 (Localización de extremos absolutos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el conjunto compacto $D = A \cup \partial A$ formado por la unión del abierto A y su frontera ∂A. El procedimeinto estándar para encontrar los extremos absolutos de f en dicho conjunto consta de los siguientes pasos:

1. *Localizar todos los extremos locales de f en el abierto A.*
2. *Hallar los extremos de la restricción de f a la frontera ∂A (es decir, considerando que f sólo está definida en ∂A).*
3. *Comparar los valores que toma f en todos los puntos hallados en los pasos 1 y 2; seleccionar el mayor y el menor de ellos.*

Si $D = A \cup \partial A$ es una región del plano delimitada por una curva continua o por la unión de varias curvas continuas $\partial A = \cup_k C_k$, el paso 2 puede llevarse a cabo de la siguiente forma:

1. Cada curva C_k se parametriza mediante una función continua $\overrightarrow{\boldsymbol{r_k}} : I_k \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \in I_k \longrightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{r_k}}(t)$
2. Se construyen las funciones $\varphi_k(t) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r_k}}(t)\right)$ y se localizan los extremos locales de las mismas.
3. Calculamos los valores de las funciones φ_k en dichos extremos y añadimos los valores que toman en los puntos donde se unen las curvas (si hubiera más de una).

Ejemplo 5.8

Encuentre el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x + 2y$ en la región compacta $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \backslash.\ x + y = 1\right\}$. Con el fin de aplicar los métodos anteriores separamos el interior y la frontera de D

$$D = A \cup \partial A \ \backslash.\ A = \left\{(x, y)\,; x^2 + y < 1\right\}, \ \ \partial A = \{(x, y)\,; x + y = 1\}\,.$$

Interior. El primer paso consiste en hallar los extremos locales de la función en el abierto A, para lo cual igualamos a cero las derivadas parciales

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 2x \\ f'_y = 4y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)\,.$$

Por lo tanto el origen es el único punto crítico en el abierto A. Para determinar su naturaleza aplicamos el criterio de la diferencial segunda. Las derivadas parciales de orden dos son

$$f_x^{(2)} = 2, \;\; f_y^{(2)} = 4, \;\; f_{xy}^{(2)} = 0,$$

con lo cual obtenemos el siguiente valor para el discriminante

$$D\left(x, y\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

En consecuencia el punto $(0, 0)$ es un mínimo local donde la función toma un valor $f\left(0, 0\right) = 0$.

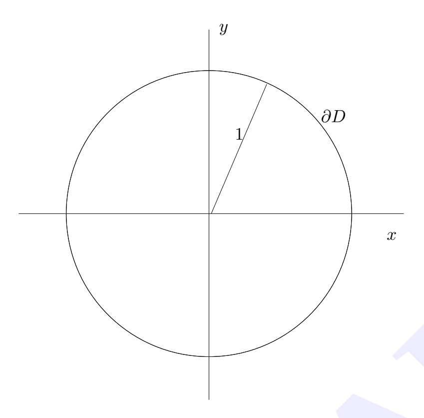


Figura 5.9: Parametrización de la frontera

Frontera. Para estudiar el comportamiento de la función en la frontera del conjunto introducimos una parametrización suave de la circunferencia de radio unidad

$$\partial A : \overrightarrow{\boldsymbol{r}}\left(\theta\right) = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\right), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

y la función

$$\varphi\left(\theta\right) = f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{r}}\left(\theta\right)\right) = \cos^2\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta,$$

que reproduce los valores de f en la frontera de la región. A continuación estudiamos los extremos locales de φ en el abierto $(0, 2\pi)$. La derivada de $\varphi'\left(\theta\right)$ viene dada por

$$\begin{aligned} \varphi'\left(\theta\right) &= -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ &= 3\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2\theta) \end{aligned}$$

Entonces, la condición de punto crítico se escribe

$$\varphi' = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(2\theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{2}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Así, en $(0, 2\pi)$ tenemos los siguientes puntos críticos

$$\theta = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\},$$

y como $\varphi^{(2)}\left(\theta\right) = 3\cos(2\theta)$, resulta que

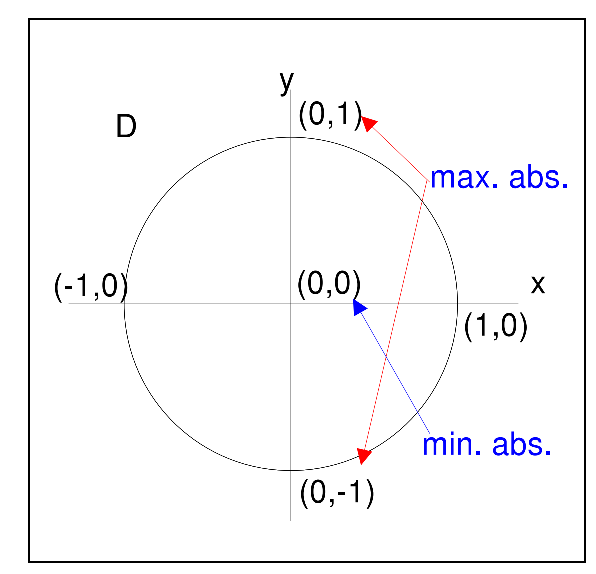


Figura 5.10: Máximos y mínimos

$$\theta = \frac{\pi}{2} \equiv (x, y) = (0, 1)\,, \quad f\,(0, 1) = 2$$

$$\varphi^{(2)}\,(\pi/2) = -3 < 0 \rightarrow (0, 1)\ \boxed{\text{máximo.}}$$

$$\theta = \pi \equiv (x, y) = (0, -1)\,, \quad f\,(0, -1) = 2$$

$$\varphi^{(2)}\,(\pi) = -3 < 0 \rightarrow (0, -1)\ \boxed{\text{máximo.}}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \equiv (x, y) = (-1, 0)\,, \quad f\,(-1, 0) = 1$$

$$\varphi^{(2)}\,(3\pi/2) = 3 > 0 \rightarrow (-1, 0)\ \boxed{\text{mínimo.}}$$

A estos tres puntos hay que añadir los extremos del intervalo, $\theta = 0, 2\pi$. Como estos dos ángulos representan un mismo punto sólo consideraremos el primero. Tenemos entonces que

$$\theta = 0 \equiv (x, y) = (1, 0)\,, \quad f\,(1, 0) = 1,$$

por lo que se comporta como un mínimo.

En definitiva, comparando los valores de f en los puntos $(0,0)$,$(1,0)$,$(-1,0)$, $(0,1)$ y $(0,-1)$, concluimos que la función f posee:

- un mínimo absoluto en $(0, 0)$ de valor $f\,(0, 0)$=0,
- y dos máximos absolutos en $(0, 1)$ y $(0, -1)$ cuyo valor es $f\,(0, 1) = f\,(0, -1) = 2$.



5.5 Extremos condicionados

Consideremos, como forma de plantear el problema, el siguiente ejemplo de minimización, típico de los sistemas productivos. Supóngase que se desea fabricar un envase con forma de paralelepípedo recto y volumen $V = 1$ litro, pero cuya superficie sea lo menor posible de manera que se minimicen los costes de producción. Si denotamos por x, y y z los lados del paralelepípedo, su volumen y área exterior vienen dados por

$$\begin{aligned} V\,(x, y, z) &= xyz, \\ A\,(x, y, z) &= 2(xy + xz + yz). \end{aligned}$$

Se trata entonces de hallar el mínimo (absoluto) de $A\,(x, y, z)$ con la condición suplementaria de que $V\,(x, y, z) = 1$.

Estos problemas se conocen con el nombre genérico de optimización condicionada y son habituales en bastantes disciplinas como la física, la economía, etc. En general consisten en localizar los extremos de una función escalar de varias variables reales $f\,(\vec{x})$ cuando éstas se encuentran condicionadas por una o varias ligaduras de la forma $\varphi\,(\vec{x}) = 0$; se habla entonces de extremos condicionados.

En el plano esto se traduce en la localización de los extremos de una función $z = f\,(x, y)$ definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, pero donde las dos variables x e y están relacionadas por un ecuación del tipo $\varphi\,(x, y) = 0$. Esto implica limitar nuestra atención a los puntos de la curva definida por esta ecuación, tal como se muestra en la figura 5.11

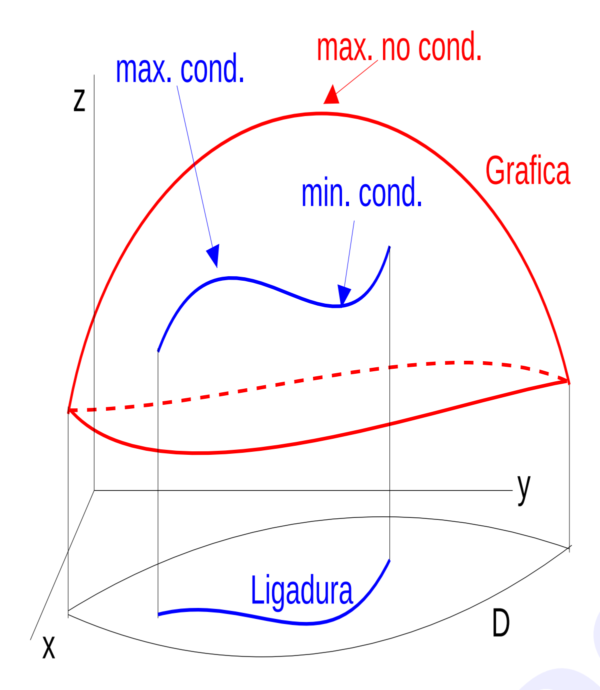


Figura 5.11: Extremos condicionados

El término extremo condicionado no es el único que se utiliza en la literatura; de hecho es usual referirse a estos puntos como extremos restringidos.

Definición 5.4 (Extremo condicionado)

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones reales definidas en el conjunto* D*. Denotaremos por* S *al conjunto de nivel con valor nulo de la función* φ*, esto es*

$$S = \left\{ \vec{x} \in D \; ; \; \varphi\left(\vec{x}\right) = 0 \right\}.$$

Decimos que f *tiene en* $\vec{x}_0 \in S$ *un extremo relativo condicionado por la ligadura* $\varphi\left(\vec{x}\right) = 0$ *si existe un valor* $\delta > 0$ *tal que*

$$f\left(\vec{x}_0\right) \geq f\left(\vec{x}\right), \; \forall \vec{x} \in B^*\left(\vec{x}_0, \delta\right) \cap S \rightarrow \boxed{\textit{Máximo condicionado}}$$
$$f\left(\vec{x}_0\right) \leq f\left(\vec{x}\right), \; \forall \vec{x} \in B^*\left(\vec{x}_0, \delta\right) \cap S \rightarrow \boxed{\textit{Mínimo condicionado}}$$

El siguiente teorema proporciona la condición necesaria para que un punto $\vec{x}_0 \in S$ sea extremo condicionado de f cuando nos restringimos al conjunto S definido por la ecuación de ligadura.

Teorema 5.6 (Método de los multiplicadores de Lagrange)

Sean $f : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi : D \subset \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones definidas en D y continuamente diferenciables (de clase C^1) en un entorno de $\vec{\boldsymbol{x}}_0$. Si $f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ tiene un extremo local en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ condicionado por la ligadura $\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = 0$, entonces existe un número $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que la función

$$g\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \lambda\right) = f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) + \lambda\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right),$$

tiene un punto crítico en $\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \lambda_0\right)$, es decir

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} g\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \lambda_0\right) = \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) + \lambda_0 \vec{\boldsymbol{\nabla}} \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \vec{\boldsymbol{0}}.$$

Antes de embarcarnos en la demostración puede ser pertinente efectuar una serie de aclaraciones sobre el significado de este resultado:

1. La función $g\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \lambda\right)$ recibe el nombre de función auxiliar y el parámetro real λ se denomina habitualmente multiplicador de Lagrange.

2. El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) + \lambda \vec{\boldsymbol{\nabla}} \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) & = & \vec{\boldsymbol{0}} \\ \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) & = & 0 \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_q} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_q} & = & 0 \\ \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

   recibe el nombre de sistema de Lagrange. Las incognitas del sistema son las q coordenadas de $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ y el valor λ_0 del multiplicador de Lagrange en el punto crítico.

3. Las soluciones de este sistema son los puntos críticos $\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0, \lambda_0\right)$ (con $\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = 0$) de la función auxiliar $g\left(\vec{\boldsymbol{x}}, \lambda\right)$; de acuerdo con el teorema precedente los extremos condicionados de f, si existen, deben coincidir con algunos de los valores $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ asociados a los puntos críticos de g.

4. Si $\lambda_0 = 0$ entonces $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right) = \vec{\boldsymbol{0}}$ y por lo tanto $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ también es un punto crítico de la función f. Si la función posee un extremo condicionado, éste coincide con un extremo local libre.

5. El teorema 5.6 posee un significado geométrico muy claro. La ligadura $\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = 0$ define el conjunto de nivel de valor cero de la función diferenciable $z = \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$. Si llamamos S a dicho conjunto, sabemos que $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ es ortogonal a S en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ (siempre que el vector gradiente no sea nulo). Por lo tanto, Si $f\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right)$ tiene un extremo local en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ condicionado por la ligadura $\varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}\right) = 0$, el vector $\vec{\boldsymbol{\nabla}} f\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ –paralelo a $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \varphi\left(\vec{\boldsymbol{x}}_0\right)$ – también es ortogonal a S en $\vec{\boldsymbol{x}}_0$.

6. Cuando la ligadura viene definida por dos ecuaciones $\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=0$ y $\psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=0$ el sistema de Lagrange se escribe

$$\left.\begin{array}{rcl}\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)+\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)+\mu\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) & = & \overrightarrow{\mathbf{0}}\\ \varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) & = & 0\\ \psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) & = & 0\end{array}\right\}$$

Demostración 5.6

Sean $f:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ y $\varphi:D\subset\mathbb{R}^q\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1 en D. El teorema 5.6 establece que los puntos críticos de la restricción f sobre S, el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=0$, son las soluciones del sistema

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)+\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=\overrightarrow{\mathbf{0}}$$

$$\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)=0$$

La ligadura define implícitamente una de las q variables x_i en función de las restantes; supongamos, por ejemplo, que

$$x_1=\psi\left(x_2,x_3,\ldots,x_q\right).$$

Antes de proseguir definimos $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*=\left(x_2,x_3,\ldots,x_q\right)$, la función

$$F\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*\right)=f\left(\psi\left(x_2,\ldots,x_q\right),x_2,\ldots,x_q\right),$$

que es la restricción de f sobre S, y la función

$$\Phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*\right)=\varphi\left(\psi\left(x_2,\ldots,x_q\right),x_2,\ldots,x_q\right)=0,$$

que toma un valor constante sobre S.

Como las dos funciones son diferenciables podemos aplicar la regla de la cadena; El diagrama de árbol correspondiente es en este caso

$$F\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_q\end{array}\right.\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_q\end{array}\right.\qquad\Bigg|\qquad\Phi\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_1\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x_2\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_q\end{array}\right.\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_q\end{array}\right.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial F\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial\psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_i},\quad i=2,3,\ldots,q,$$

y

$$\frac{\partial\Phi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0^*\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_1}\frac{\partial\psi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}^*\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)}{\partial x_i}=0\quad i=2,3,\ldots,q,$$

donde en este segundo caso las derivadas son nulas porque Φ es nula sobre S.

Supongamos ahora que la restricción de f sobre el conjunto S posee un extremo local en $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\in S$. Esto implica que $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}F\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0^*\right)=\overrightarrow{\mathbf{0}}$, y por lo tanto

$$\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}\frac{\partial \psi\left(\vec{x}_0^*\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}=0,$$
$$\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}\frac{\partial \psi\left(\vec{x}_0^*\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}=0$$

para $i=2,3,\ldots,q$. Multiplicando la segunda ecuación por un número arbitrario λ y sumando ámbas ecuaciones resulta

$$\left[\frac{\partial f\left(x_0\right)}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}\right]\frac{\partial \psi\left(\vec{x}_0^*\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}=0.$$

Si $\dfrac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}\neq 0$ basta con elegir λ de manera que

$$\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_1}=0,$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial f\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial \varphi\left(\vec{x}_0\right)}{\partial x_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,q.$$

Ejemplo 5.9

Obténgase el mínimo de $f\left(x,y\right)=2x+y$ condicionado por la ligadura $x+y=1$.
Para obtener este punto (y el valor de la función) podemos proceder de dos maneras distintas:

i) Despejando la ordenada y de la ecuación de ligadura tenemos que $y=1-x$ y definiendo la función

$$h\left(x\right)=f\left(x,1-x\right)=2x+\left(1-x\right)^2=1+x^4,$$

resulta obvio que el mínimo absoluto de h corresponde a $x=0$. Por lo tanto $y=1$ de forma que el mínimo condicionado de f ocurre en $(0,1)$ donde $f\left(0,1\right)=1$. Por comparación el mínimo libre ocurre en $(0,0)$, donde $f\left(0,0\right)=0$.

ii) Como cálculo alternativo aplicamos método de los multiplicadores de Lagrange. Previamente hemos identificado la función a minimizar y la ligadura:

$$\boxed{\text{Función:}}\rightarrow f\left(x,y\right)=2x+y,$$
$$\boxed{\text{Ligadura:}}\rightarrow \varphi\left(x,y\right)=x+y-1=0.$$

Los gradientes de las dos funciones vienen dados por

$$\vec{\nabla}f=\left(4x,2y\right)\ ;\ \vec{\nabla}\varphi=\left(2x,1\right),$$

de manera que el sistema de Lagrange es

$$\left.\begin{aligned}\vec{\nabla}f+\lambda\vec{\nabla}\varphi&=\vec{0}\\ \varphi&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}4x+\lambda(2x)=0\\ 2y+\lambda=0\\ x+y=1\end{array}\right.$$

Utilizando la primera ecuación tenemos

$$x(2+\lambda)=0\rightarrow x=0\ \text{ó}\ \lambda=-2.$$

Si $x = 0$ despejamos y de la ecuación de ligadura encontrando un valor $y = 1$. Si $\lambda = -2$ podemos determinar el valor de y utilizando la segunda ecuación del sistema. Así

$$y = -\frac{\lambda}{2} = 1,$$

y substituyendo en la ligadura resulta $x = \pm\sqrt{1-y} = 0$. Por lo tanto, existe un único punto crítico $(x_0, y_0) = (0, 1)$. El método de los multiplicadores establece que si existe un extremo debe coincidir con este punto. Así, la cuestión ahora radica en determinar si realmente existe tal extremo.

Como la función está acotada inferiormente ya que $f(x, y) = 2x^2 + y^2 \geq 0$ debe poseer un mínimo; por el contrario la función no está acotada superiormente y en consecuencia no posee máximo absoluto. En efecto, cuando $x \to \pm\infty$ la ligadura impone que $y \to -\infty$, de manera que

$$f(x, y) \to \infty, \quad x \to \pm\infty.$$

Por lo tanto la restricción de la función al conjunto definido por $x^2 + y = 1$ posee un mínimo absoluto y éste debe ocurrir en el punto $(0, 1)$.



Ejemplo 5.10

Obtenga los extremos locales de la restricción de la función $f(x, y) = xy$ sobre la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Con este fin aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange. La función cuyos extremos debemos hallar y la ligadura son:

$$\boxed{\text{Función:}} \to f(x, y) = xy,$$
$$\boxed{\text{Ligadura:}} \to \varphi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Las derivadas parciales de ámbas funciones vienen dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y,$$

con lo cual debemos hallar las soluciones en x, y y λ del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y + \lambda(2x) &= 0, \\ x + \lambda(2y) &= 0, \\ x + y &= 1. \end{aligned}$$

Despejando y de la primera ecuación y substituyendo en la segunda tenemos

$$y = -2\lambda x \to x(1 - 4\lambda) = 0 \to \begin{cases} x = 0 & \to \quad y = 0 \\ 2\lambda = \pm 1 & \to \quad y = \mp x \end{cases}$$

Introduciendo la solución $x = y = 0$ en la ecuación de la ligadura llegamos a la igualdad absurda $0 = 1$, lo que descarta dicha solución. Utilizando la segunda solución e introduciéndola en la ecuación de ligadura reslta

$$y = \pm x \to 2x = 1 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

con lo cual quedan cuatro soluciones satisfactorias dadas por

$$(x_i, y_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

De acuerdo con el método de los multiplicadores existen cuatro puntos críticos entre los que deben encontrarse los extremos condicionados de f, si es que existen. Ahora bien, la circunferencia C es un conjunto

cerrado y acotado y f es una función continua: por lo tanto deberá alcanzar su máximo y su mínimo absolutos en C. Así bastará con calcular los valores de la función en los puntos críticos y seleccionar el mayor y el menor de ellos. Procediendo de esta forma tenemos

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{\text{Máximo}}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}\rightarrow\boxed{\text{Mínimo}}$$

Es decir, la restricción de f sobre la circunferencia C alcanza un valor máximo en

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

y un valor mínimo en los dos puntos

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$


Problemas

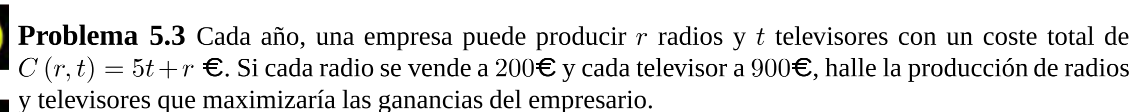
Problema 5.1 Cuando el señor Tompkins[2] entró en el despacho, el profesor estaba muy concentrado colocando unas partículas en dos gráficas que tenía sobre su mesa. Mientras esperaba educadamente a que el profesor terminase su tarea para no distraerlo, el señor Tompkins curioseó entre los objetos que el profesor había traído de sus viajes por las selvas cuánticas y uno de los colmillos de elefante cuántico se le cayó al suelo.
- Oh, ¡Dios mío! -exclamó el profesor.
- Lo siento, ¿era muy importante lo que estaba haciendo?
- No, sólo estaba jugando con unas partículas clásicas... Las estaba colocando en estos potenciales justo en sus posiciones de equilibrio para que se mantuviesen en reposo.
- Oh, y al caérseme el colmillo se habrán descolocado. Lo siento.
- Lo cierto es que eran partículas puntuales, que son muy pequeñas y muy difíciles de encontrar... no me haría mucha gracia perderlas. Pero aún hay esperanza, la perturbación debida al golpe ha sido muy pequeña y algunas pueden haberse quedado oscilando cerca de donde las dejé. Ayúdeme a ver cuántas he perdido y cuántas puedo localizar. Acababa de dejar completamente inmóvil la última partícula en uno de los puntos de equilibrio de estos potenciales:

1. $V(x,y)=x+xy+y-3x-3y$
2. $V(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$

Ayude al señor Tompkins a localizar los puntos de equilibrio de estos dos potenciales en $\mathbb{R}^2$.

Problema 5.2 Determine para qué valores de k tienen un mínimo local en $(0,0)$ las siguientes funciones:

1. $f(x,y)=x+kxy+3y$
2. $f(x,y)=kx+5xy+4y$



Problema 5.3 Cada año, una empresa puede producir r radios y t televisores con un coste total de $C(r,t)=5t+r$ €. Si cada radio se vende a 200€ y cada televisor a 900€, halle la producción de radios y televisores que maximizaría las ganancias del empresario.

Problema 5.4 Determine el máximo y el mínimo absolutos de las funciones:

[2] Personaje protagonista de la obra *"El breviario del señor Tompkins"*. Esta historia no corresponde a ninguna de sus aventuras imaginadas por *George Gamow*, físico de reconocido prestigio, que vivió en el siglo XX.

1. $f(x, y) = x + xy + y$ definida en el disco $x + y \leq 4$.
2. $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ en el disco $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 25\}$.
3. $f(x, y) = (x-y)^2$ en la región cerrada y acotada $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 12 - 2x\}$.



Problema 5.5 Halle las distancias máxima y mínima de los puntos la elipse de ecuación $5x+6xy+5y = 8$ al origen de coordenadas.



Problema 5.6 Determine las dimensiones del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio r y cuya superficie tiene área máxima.



Problema 5.7 Determine las dimensiones del paralelepípedo recto inscrito en una esfera de radio r, cuyo volumen es máximo.



Problema 5.8 Una empresa utiliza fibras de lana y algodón para producir tela. La cantidad de tela producida viene dada por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$ donde x es la cantidad de lana e y la de algodón, ambas medidas en las unidades adecuadas de masa y con $x, y \geq 1$. Si los precios de la lana y del algodón por unidad de masa son p € y q €, respectivamente y la empresa sólo puede invertir E €, determine la proporción de lana y algodón para producir la mayor cantidad de tela posible.



Problema 5.9 Demuestre que de todos los triángulos que tienen un perímetro dado, el equilátero es el que tiene mayor área.Pista: El área puede escribirse como $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ donde s representa el semiperímetro $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$

El proyecto *libros abiertos* de Alqua

El texto que sigue es una explicación de qué es y cómo se utiliza un libro abierto y contiene algunas recomendaciones sobre cómo crear un libro abierto a partir de un documento de Alqua. Si estás leyendo estas páginas como anexo a otro documento, éste es casi con seguridad un *documento libre* de Alqua; libre en el sentido descrito en el manifiesto de Alqua y las directrices para documentos libres de Alqua. Si has obtenido dicho documento en un centro público, como una biblioteca, entonces es además un *libro abierto* de Alqua.)

Qué son los libros abiertos

Los libros abiertos son ediciones impresas de los documentos libres de Alqua que se pueden obtener en las bibliotecas u otros centros públicos. La particularidad de los libros abiertos no reside en *qué contienen* (el contenido es el mismo que el de los libros descargados de la red) sino en *cómo pueden utilizarse*.

Al igual que los usuarios de Alqua a través de la red forman una comunidad de interés que aprende colectivamente leyendo los documentos, discutiendo sobre ellos y modificándolos para adaptarlos a propósitos muy variados, los lectores de una biblioteca constituyen también una comunidad. El ciclo de vida de un documento libre es de constante realimentación: las nuevas versiones son leídas, corregidas o quizá bifurcadas, lo que conduce a la publicación de nuevas versiones listas a su vez para un nuevo ciclo del proceso. ¿Por qué no abrir esa dinámica a la participación de comunidades que no se articulan en torno a la red?. No todos disponen del tiempo o los medios para participar efectivamente en el proceso de mejora de los documentos a través de la red, que es la aportación diferencial más importante de los libros libres respecto a los no libres. Por ello queremos poner a disposición de las bibliotecas *libros abiertos* que faciliten lo siguiente:

- El acceso de personas sin recursos informáticos al conocimiento que su estudio proporciona.
- La posibilidad de contribuir a la mejora de dichos documentos por parte de la amplísima comunidad de lectores de las bibliotecas, sin otro medio que un lápiz o una pluma.
- La formación de grupos de interés locales: compartir a través de un documento libre puede compartir su proceso de aprendizaje con personas interesadas por temas afines.
- La constitución, hasta en los centros que cuentan con una financiación más débil, de un fondo de documentos libres que cubra áreas del conocimiento que su presupuesto no permite afrontar.

¿Cómo puedo contribuir a los libros abiertos?

Sólo tienes que utilizarlos como si fuesen tuyos, pero recordando que compartes tu experiencia de aprendizaje con otras personas.

Por ejemplo, contrariamente a lo que harías con cualquier otro libro de la biblioteca puedes escribir en los márgenes de los libros abiertos tus propios comentarios: correcciones, aclaraciones, bibliografía relacionada... Intenta hacerlo ordenadamente, de modo que no interrumpa la lectura.

Si quieres compartir algún razonamiento más largo, puedes utilizar tus propias hojas e incorporarlas al final del documento, poniendo una nota donde corresponda. En este caso, no olvides firmar tu contribución con un nombre o seudónimo y, opcionalmente, una dirección de correo electrónico u otra forma de contacto.

Cualquiera que pueda participar a través de la red puede incorporar tus contribuciones a la versión que se distribuye en línea, con la ayuda de la comunidad de Alqua. De esta manera abrimos el mecanismo de colaboración a los lectores que no están acostumbrados al ordenador o prefieren no usarlo. La firma permite atribuir la autoría en el caso de que los cambios se incorporen y establecer contacto al respecto. Damos por hecho que al escribir tus aportaciones en un libro abierto estás de acuerdo con que sean libremente utilizadas (en el sentido descrito en las directrices para documentos libres ya mencionadas) y por lo tanto incorporadas a las sucesivas versiones digitales.

Los libros abiertos pueden ser editados de modo que se puedan separar sus hojas porque no hay inconveniente en que éstas sean fotocopiadas: no tenemos que usar la encuadernación como un modo de evitar la reproducción, puesto que no sólo no la prohibimos sino que animamos a ella. Por tanto, una vez que obtengas un ejemplar en préstamo puedes llevar contigo sólo la parte que estés utilizando.

Como lector, tu ayuda es necesaria no sólo para mejorar los documentos, sino para que existan: hace falta imprimir, encuadernar y donar a una biblioteca un documento libre de Alqua para que se convierta en un *libro abierto*.

Quienes tengan acceso a una impresora pueden ayudar a que los *libros abiertos* perduren en la biblioteca sustituyendo las partes deterioradas por el uso y actualizando periódicamente el documento impreso. Para facilitar la tarea a continuación proponemos un sistema de encuadernación modular.

¿Cómo puedo publicar un libro abierto?

Los pasos para publicar un libro abierto son los siguientes:

1. Imprimir la versión más actualizada del documento tal cual se distribuye en la página web de Alqua, alqua.org

2. Conseguir una encuadernación modular – sugerimos un archivador de anillas con una ventana o de portada transparente. Ello permite llevar consigo sólo la parte del libro que se está usando y añadir hojas con nuevas contribuciones.

3. Encuadernar el libro y situar el título, el autor y la clasificación decimal universal en su lomo y tapas.

4. Si puedes, adjuntar al archivador una copia del CD-ROM de documentos libres de Alqua.

5. Donarlo a la biblioteca y comunicar a Alqua la edición, escribiendo a librosabiertos@alqua.org.

Se trata de un proceso sencillo al alcance tanto de particulares como de bibliotecas y otras instituciones, con un coste marginal que no se verá significativamente incrementado por la conservación y actualización puesto que se puede mantener la encuadernación y sustituir solamente las páginas impresas.

En conclusión

El proyecto *libros abiertos*, consecuencia de los principios establecidos en el manifiesto de Alqua, persigue dotar a las bibliotecas de un fondo amplio y asequible de documentos libres y a la vez facilitar la participación de los usuarios en el proceso creativo del que son fruto.

Tu ayuda es esencial para que el proyecto alcance estos objetivos.

CAL2	CÁLCULO MULTIVARIABLE	531.5	ALQ

† lomo para ediciones impresas

Cálculo multivariable

Cálculo Multivariable

Joaquin Retamosa Granado y Pablo M. García Corzo

Curso de cálculo II

requisitos

Conocimientos básicos de cálculo en una variable

en internet http://alqua.org/documents/CAL2